при поддержке
{а}вижн

Лекция 6

Перевод и адаптация материалов Джона ДеНиро (John DeNero). Используется с разрешения автора.

Рекурсивные функции

Рекурсивные функции

Рекурсивные функции

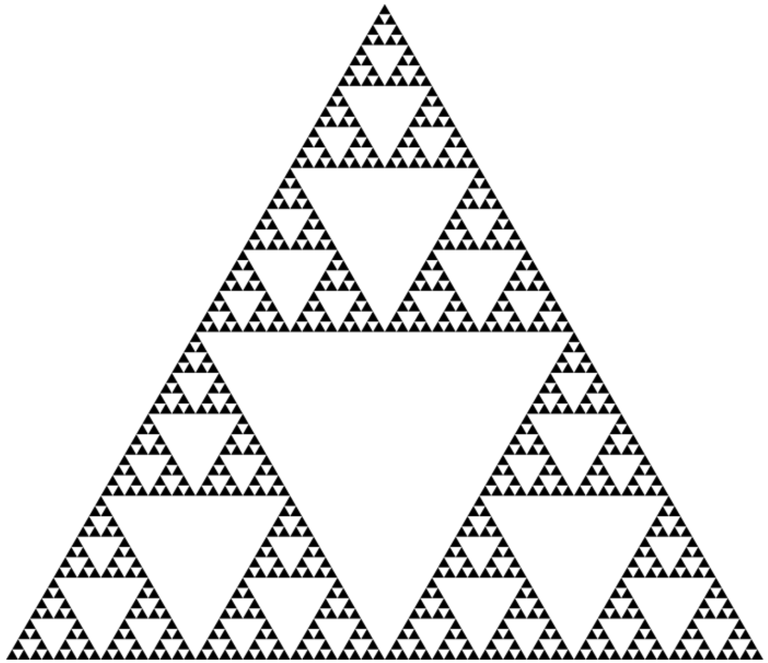
Определение

Рекурсивной называется функция, тело которой прямо или косвенно вызывает само себя.

Рекурсивные функции

Определение

Рекурсивной называется функция, тело которой прямо или косвенно вызывает само себя.

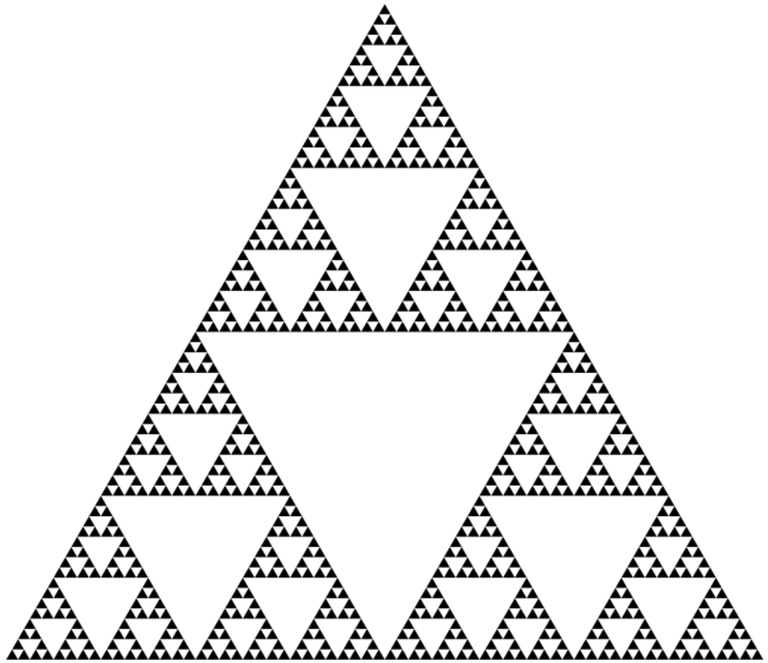


Треугольник Серпинского (1915)

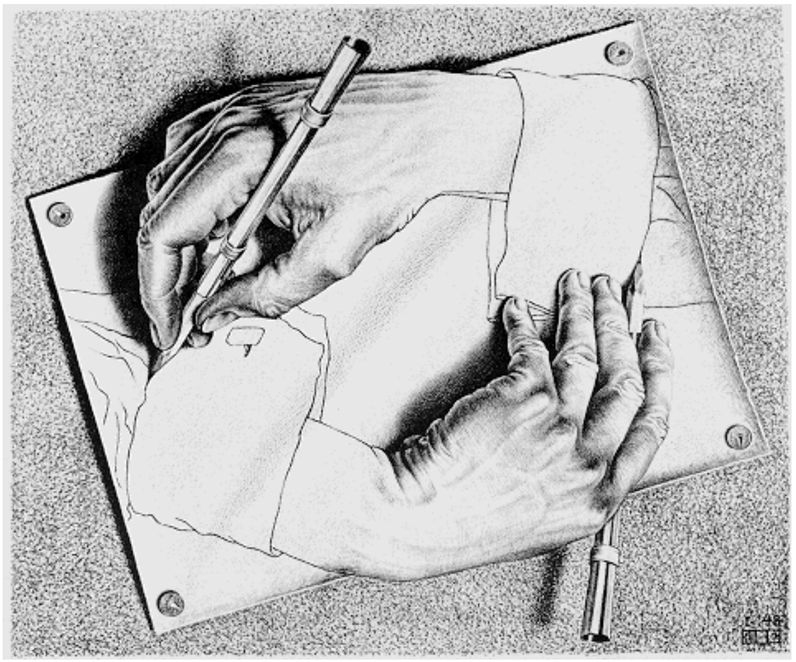
Рекурсивные функции

Определение

Рекурсивной называется функция, тело которой прямо или косвенно вызывает само себя.



Треугольник Серпинского (1915)



Рисующие руки, Морис Корнелиус Эшер (литография, 1948)

Суммирование цифр

1 + 3 + 3 + 7 = 14

Суммирование цифр

1 + 3 + 3 + 7 = 14

- Если число a делится на 9, то сумма его цифр — sum_digits(a) — также делится на 9.

Суммирование цифр

1 + 3 + 3 + 7 = 14

- Если число a делится на 9, то сумма его цифр – sum_digits(a) – также делится на 9.
- Полезно для определения опечаток!

Суммирование цифр

1 + 3 + 3 + 7 = 14

- Если число a делится на 9, то сумма его цифр — `sum_digits(a)` — также делится на 9.
- Полезно для определения опечаток!

Суммирование цифр

1 + 3 + 3 + 7 = 14

- Если число a делится на 9, то сумма его цифр – `sum_digits(a)` – также делится на 9.
- Полезно для определения опечаток!

Суммирование цифр

1 + 3 + 3 + 7 = 14

- Если число a делится на 9, то сумма его цифр – `sum_digits(a)` – также делится на 9.
- Полезно для определения опечаток!

- В номерах пластиковых карт используется алгоритм Лу́на, который будет рассмотрен чуть позже.

Суммирование цифр без инструкции «while»

Суммирование цифр без инструкции «while»

```
def split(n):
    """Разделяет положительное n на последнюю цифру и все остальные."""
    return n // 10, n % 10
```

Суммирование цифр без инструкции «while»

```
def split(n):
    """Разделяет положительное n на последнюю цифру и все остальные."""
    return n // 10, n % 10


def sum_digits(n):
    """Возвращает сумму цифр положительного целого n."""
```

Суммирование цифр без инструкции «while»

```
def split(n):
    """Разделяет положительное n на последнюю цифру и все остальные."""
    return n // 10, n % 10


def sum_digits(n):
    """Возвращает сумму цифр положительного целого n."""
    if n < 10:
        return n
```

Суммирование цифр без инструкции «while»

```
def split(n):
    """Разделяет положительное n на последнюю цифру и все остальные."""
    return n // 10, n % 10


def sum_digits(n):
    """Возвращает сумму цифр положительного целого n."""
    if n < 10:
        return n
    else:
        all_but_last, last = split(n)
```

Суммирование цифр без инструкции «while»

```
def split(n):
    """Разделяет положительное n на последнюю цифру и все остальные."""
    return n // 10, n % 10


def sum_digits(n):
    """Возвращает сумму цифр положительного целого n."""
    if n < 10:
        return n
    else:
        all_but_last, last = split(n)
        return sum_digits(all_but_last) + last
```

Структура рекурсивной функции

```
def sum_digits(n):
    """Возвращает сумму цифр положительного целого n."""
    if n < 10:
        return n
    else:
        all_but_last, last = split(n)
        return sum_digits(all_but_last) + last
```

Структура рекурсивной функции

- Заголовок инструкции def как и в других функциях

```
def sum_digits(n):
    """Возвращает сумму цифр положительного целого n."""
    if n < 10:
        return n
    else:
        all_but_last, last = split(n)
        return sum_digits(all_but_last) + last
```

Структура рекурсивной функции

- Заголовок инструкции def как и в других функциях

```
def sum_digits(n):
    """Возвращает сумму цифр положительного целого n."""
    if n < 10:
        return n
    else:
        all_but_last, last = split(n)
        return sum_digits(all_but_last) + last
```

Структура рекурсивной функции

- Заголовок инструкции def как и в других функциях
- Инструкция ветвления отделяет простые (базовые) случаи

```
def sum_digits(n):
    """Возвращает сумму цифр положительного целого n."""
    if n < 10:
        return n
    else:
        all_but_last, last = split(n)
        return sum_digits(all_but_last) + last
```

Структура рекурсивной функции

- Заголовок инструкции def как и в других функциях
- Инструкция ветвления отделяет простые (базовые) случаи

```
def sum_digits(n):
    """Возвращает сумму цифр положительного целого n."""
    if n < 10:
        return n
    else:
        all_but_last, last = split(n)
        return sum_digits(all_but_last) + last
```

Структура рекурсивной функции

- Заголовок инструкции def как и в других функциях
- Инструкция ветвления отделяет простые (базовые) случаи
- Простые случаи выполняются без рекурсивных вызовов

```
def sum_digits(n):
    """Возвращает сумму цифр положительного целого n."""
    if n < 10:
        return n
    else:
        all_but_last, last = split(n)
        return sum_digits(all_but_last) + last
```

Структура рекурсивной функции

- Заголовок инструкции def как и в других функциях
- Инструкция ветвления отделяет простые (базовые) случаи
- Простые случаи выполняются без рекурсивных вызовов

```
def sum_digits(n):
    """Возвращает сумму цифр положительного целого n."""
    if n < 10:
        return n
    else:
        all_but_last, last = split(n)
        return sum_digits(all_but_last) + last
```

Структура рекурсивной функции

- Заголовок инструкции def как и в других функциях
- Инструкция ветвления отделяет простые (базовые) случаи
- Простые случаи выполняются без рекурсивных вызовов
- Рекурсивные случаи выполняются с рекурсивными вызовами

```
def sum_digits(n):
    """Возвращает сумму цифр положительного целого n."""
    if n < 10:
        return n
    else:
        all_but_last, last = split(n)
        return sum_digits(all_but_last) + last
```

Структура рекурсивной функции

- Заголовок инструкции def как и в других функциях
- Инструкция ветвления отделяет простые (базовые) случаи
- Простые случаи выполняются без рекурсивных вызовов
- Рекурсивные случаи выполняются с рекурсивными вызовами

```
def sum_digits(n):
    """Возвращает сумму цифр положительного целого n."""
    if n < 10:
        return n
    else:
        all_but_last, last = split(n)
        return sum_digits(all_but_last) + last
```

Структура рекурсивной функции

- Заголовок инструкции def как и в других функциях
- Инструкция ветвления отделяет простые (базовые) случаи
- Простые случаи выполняются без рекурсивных вызовов
- Рекурсивные случаи выполняются с рекурсивными вызовами

(Пример)

```
def sum_digits(n):
    """Возвращает сумму цифр положительного целого n."""
    if n < 10:
        return n
    else:
        all_but_last, last = split(n)
        return sum_digits(all_but_last) + last
```

Рекурсия на диаграммах окружения

Рекурсия на диаграммах окружения

```
1 def fact(n):
2     if n == 0:
3         return 1
4     else:
5         return n * fact(n-1)
6
7 fact(3)
```

Интерактивная диаграмма

Рекурсия на диаграммах окружения

```
1  def fact(n):
2      if n == 0:
3          return 1
4      else:
5          return n * fact(n-1)
6
7  fact(3)
```

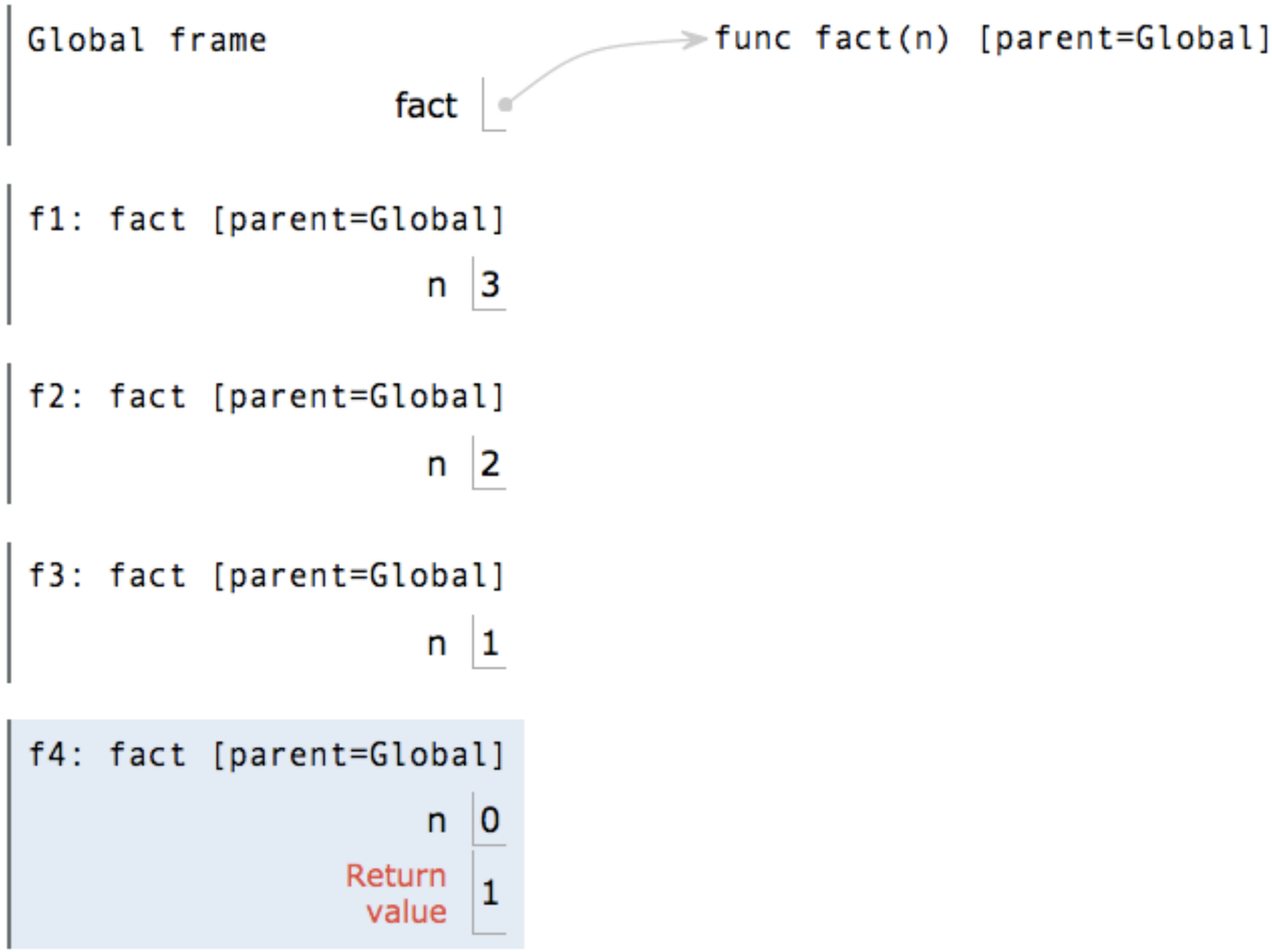
(Пример)

Интерактивная диаграмма

Рекурсия на диаграммах окружения

```
1  def fact(n):
2      if n == 0:
3          return 1
4      else:
5          return n * fact(n-1)
6
7  fact(3)
```

(Пример)



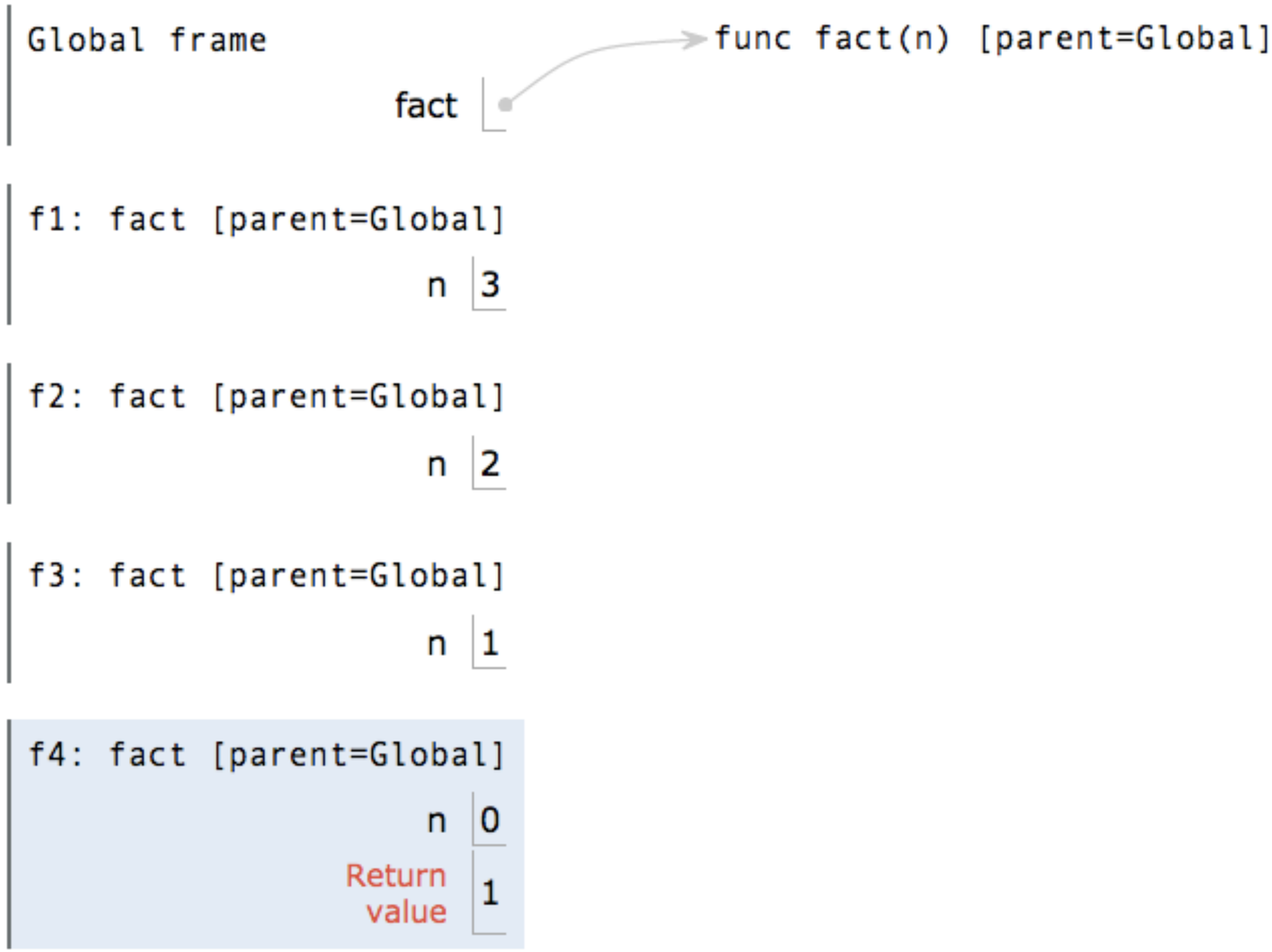
Интерактивная диаграмма

Рекурсия на диаграммах окружения

```
1  def fact(n):
2      if n == 0:
3          return 1
4      else:
5          return n * fact(n-1)
6
7  fact(3)
```

- Одна и та же функция **fact** вызывается множество раз.

(Пример)



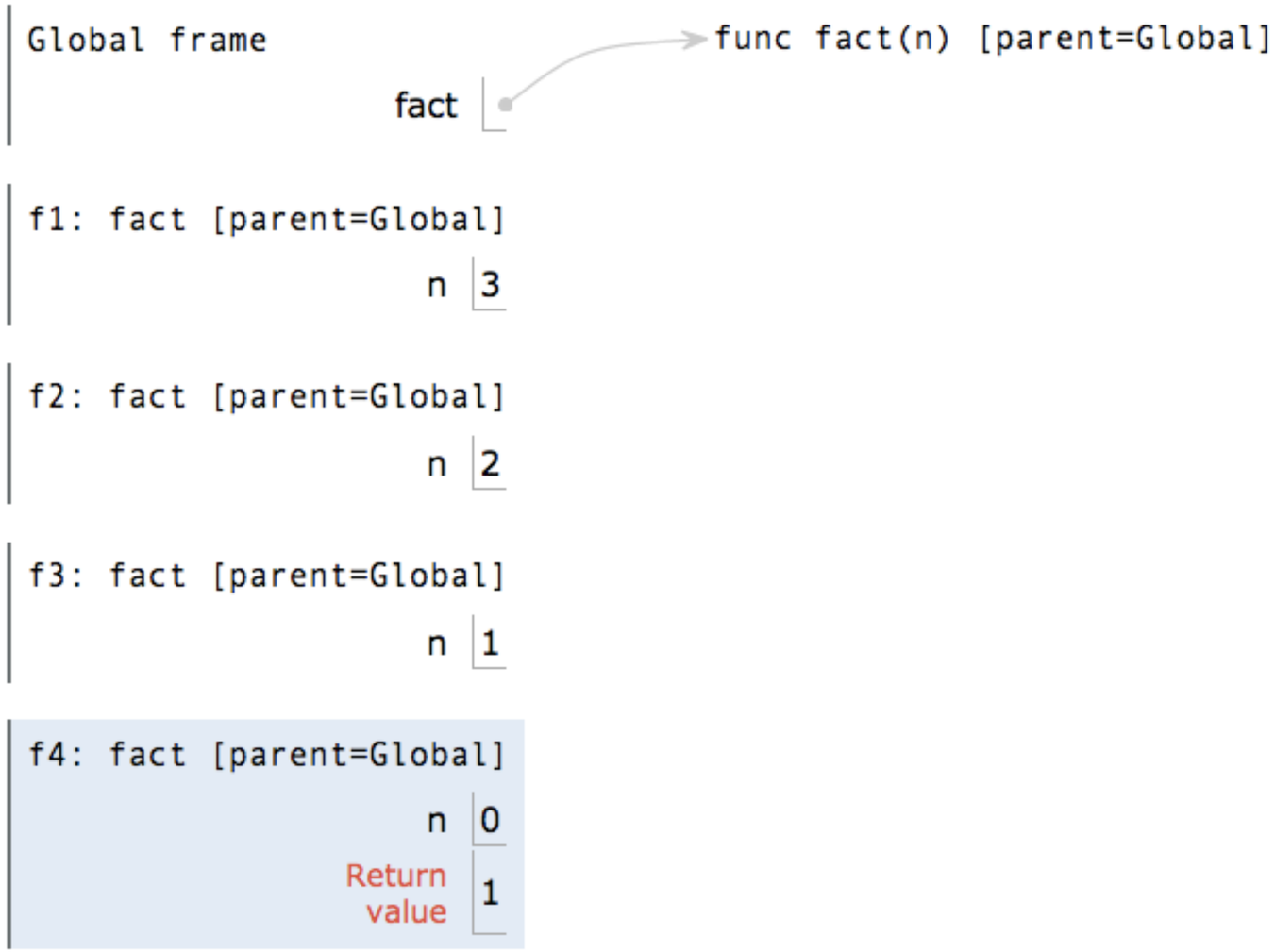
Интерактивная диаграмма

Рекурсия на диаграммах окружения

```
1  def fact(n):
2      if n == 0:
3          return 1
4      else:
5          return n * fact(n-1)
6
7  fact(3)
```

- Одна и та же функция **fact** вызывается множество раз.

(Пример)



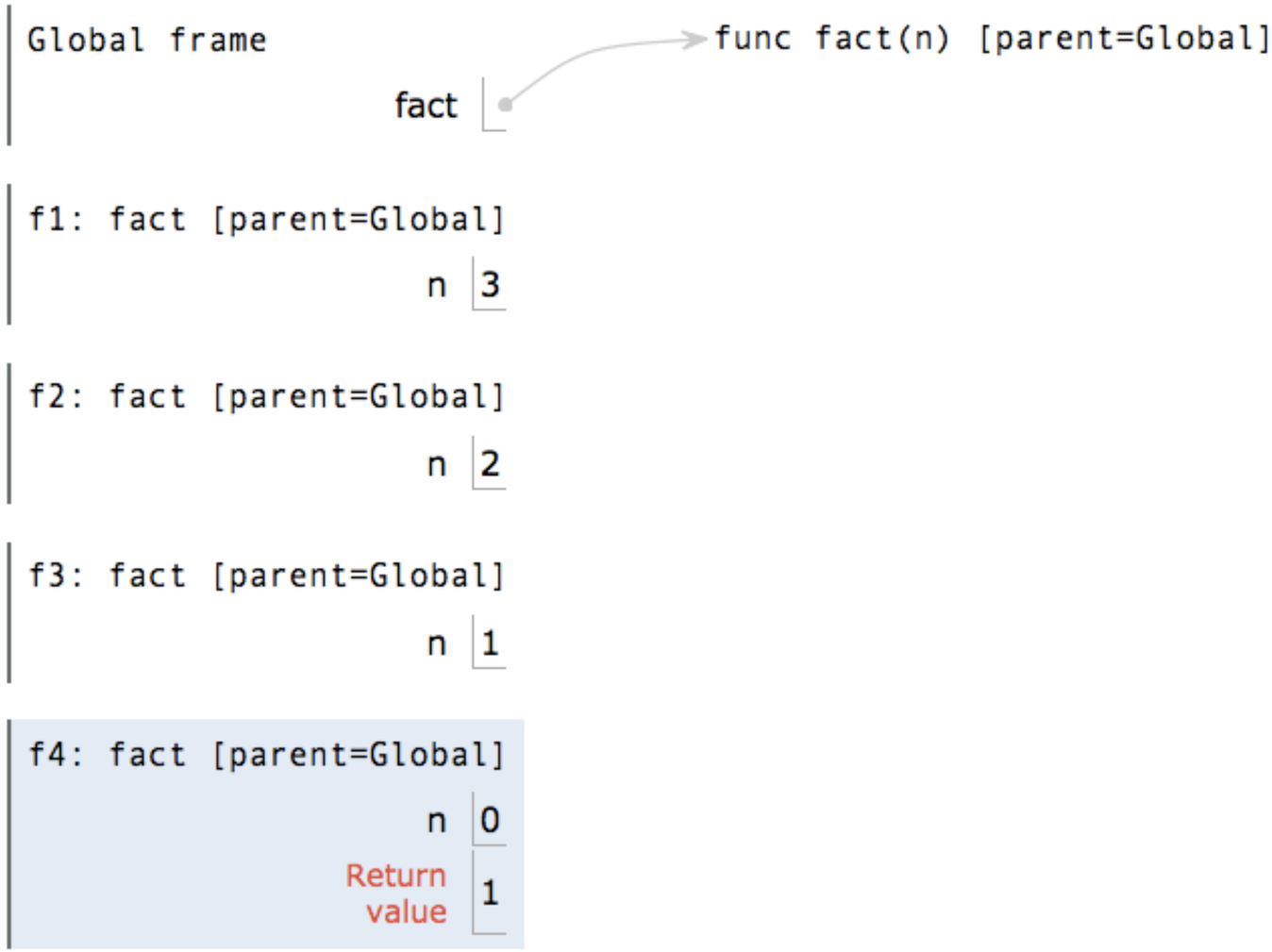
Интерактивная диаграмма

Рекурсия на диаграммах окружения

```
1  def fact(n):
2      if n == 0:
3          return 1
4      else:
5          return n * fact(n-1)
6
7  fact(3)
```

- Одна и та же функция **fact** вызывается множество раз.
- Различные фреймы хранят разные аргументы для разных вызовов.

(Пример)



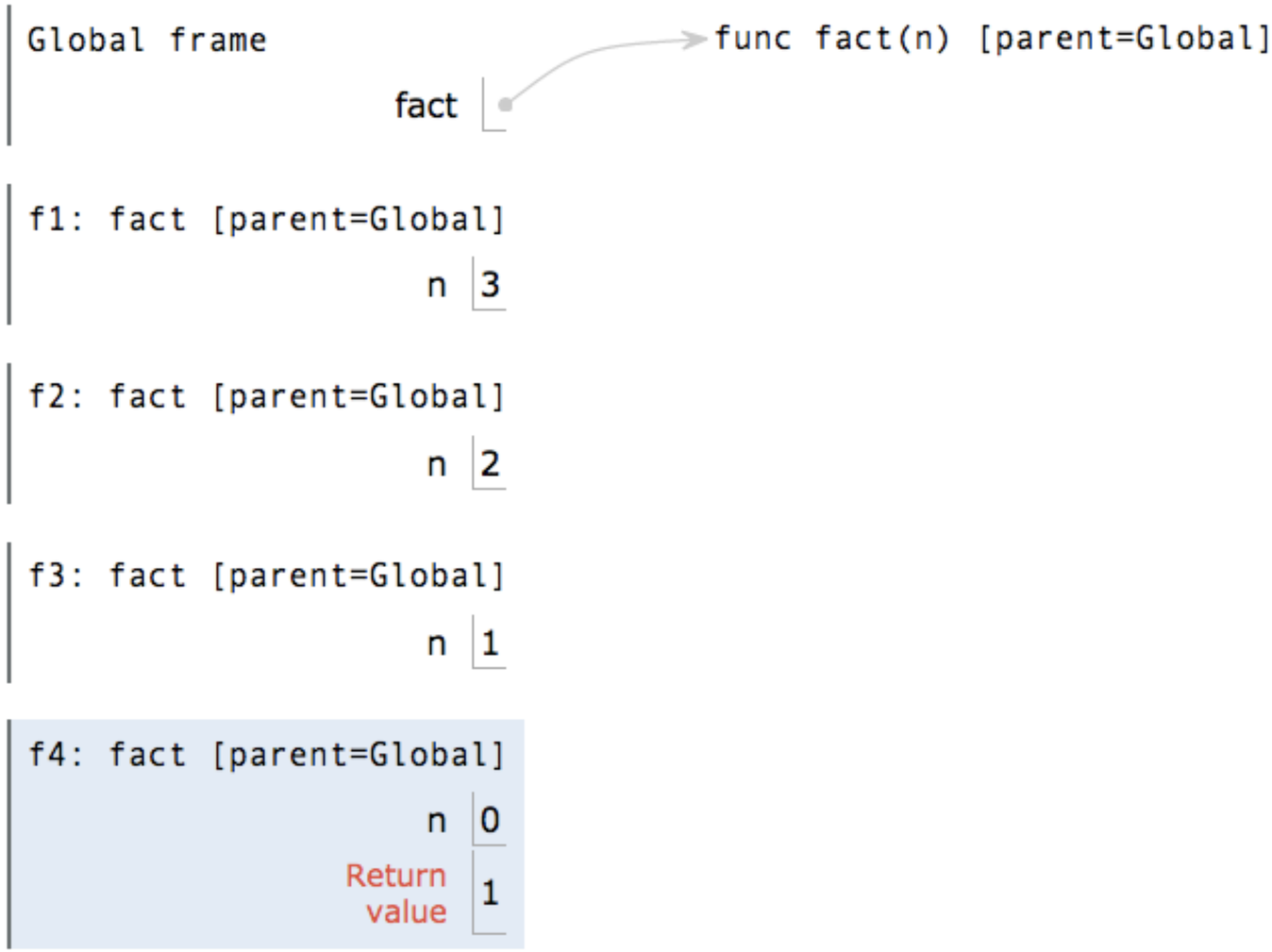
Интерактивная диаграмма

Рекурсия на диаграммах окружения

```
1  def fact(n):
2      if n == 0:
3          return 1
4      else:
5          return n * fact(n-1)
6
7  fact(3)
```

- Одна и та же функция **fact** вызывается множество раз.
- Различные фреймы хранят разные аргументы для разных вызовов.
- Значение **n** зависит от текущего окружения.

(Пример)



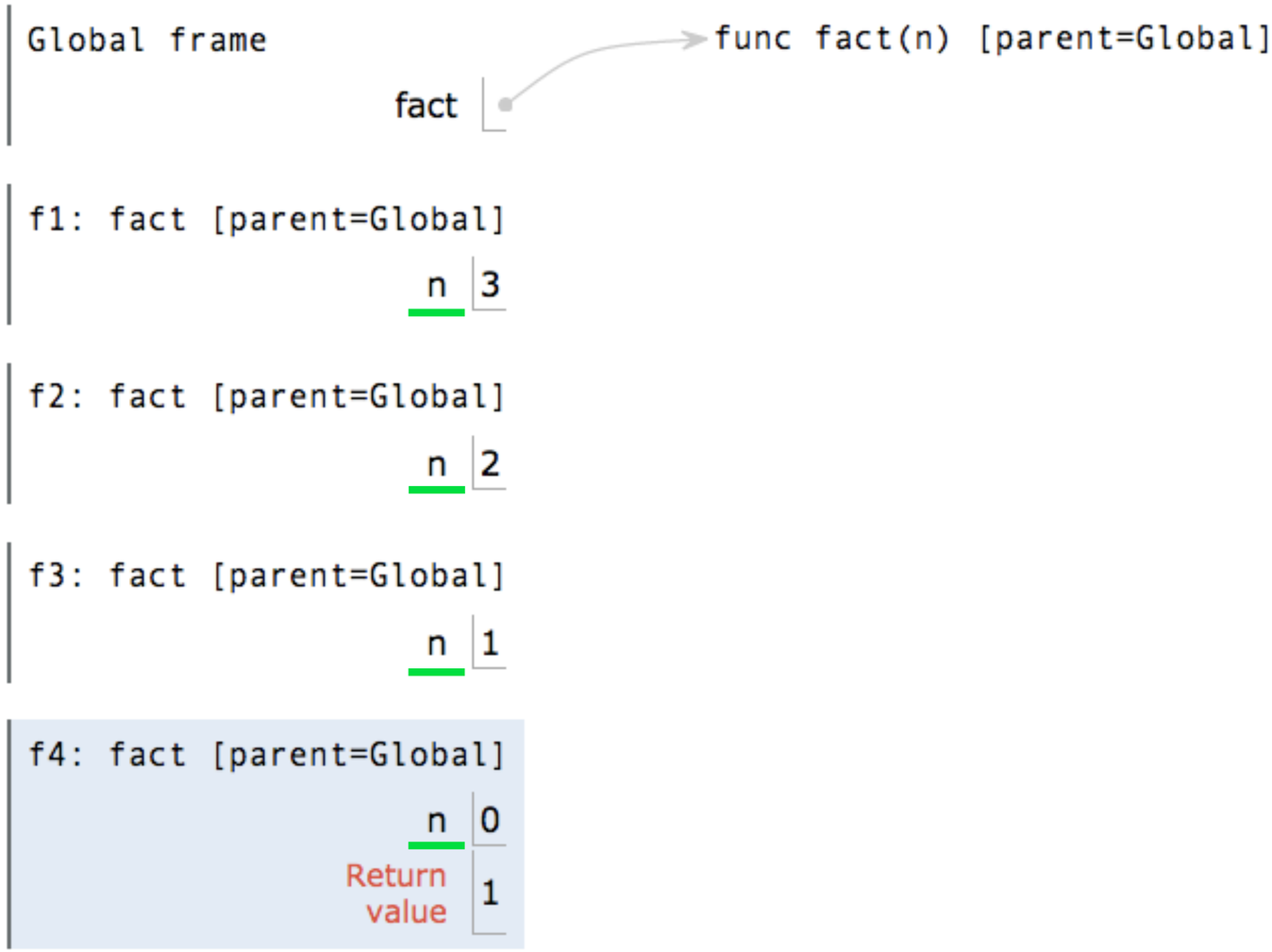
Интерактивная диаграмма

Рекурсия на диаграммах окружения

```
1  def fact(n):
2      if n == 0:
3          return 1
4      else:
5          return n * fact(n-1)
6
7  fact(3)
```

- Одна и та же функция **fact** вызывается множество раз.
- Различные фреймы хранят разные аргументы для разных вызовов.
- Значение **n** зависит от текущего окружения.

(Пример)



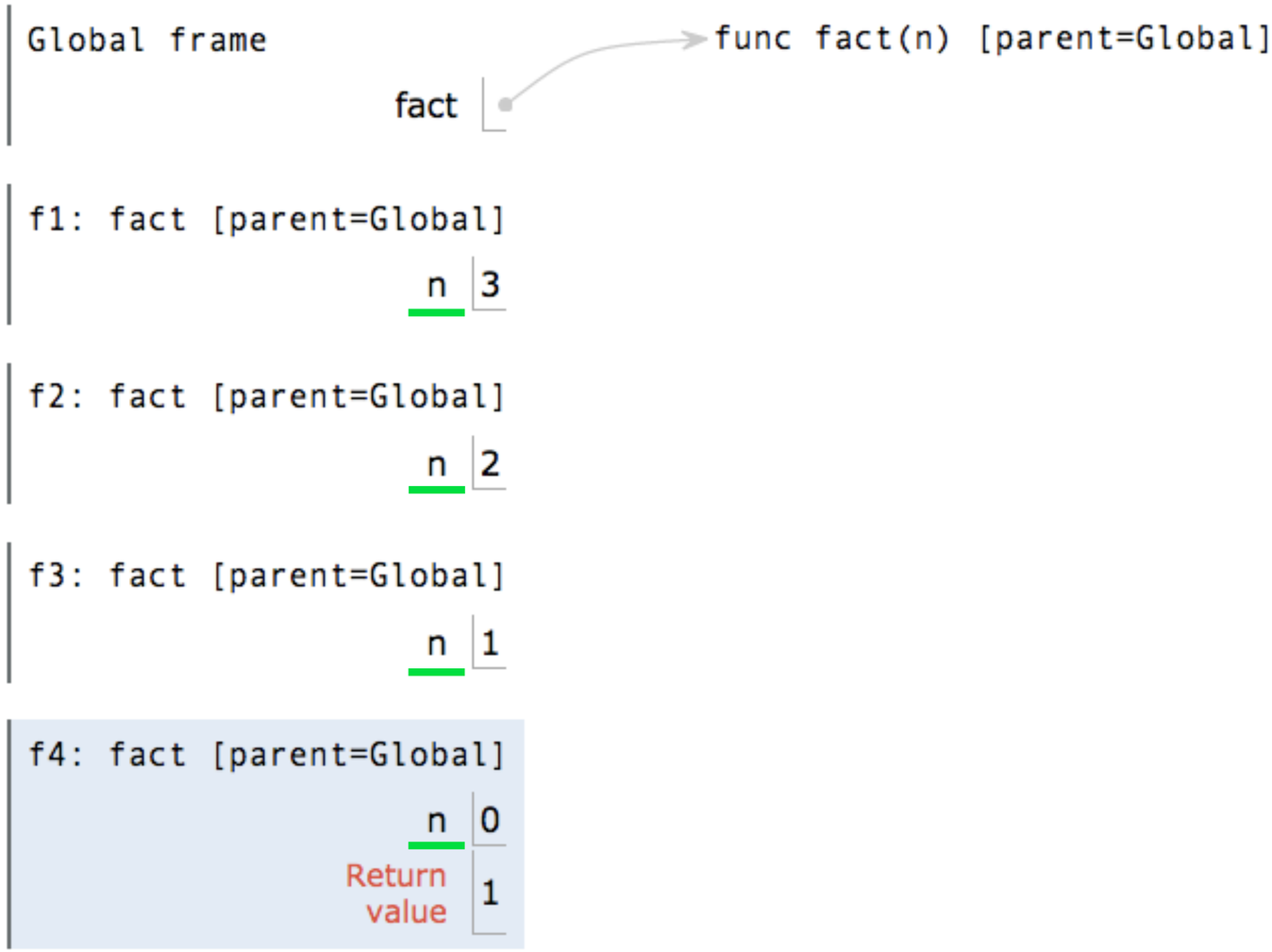
Интерактивная диаграмма

Рекурсия на диаграммах окружения

```
1  def fact(n):
2      if n == 0:
3          return 1
4      else:
5          return n * fact(n-1)
6
7  fact(3)
```

- Одна и та же функция **fact** вызывается множество раз.
- Различные фреймы хранят разные аргументы для разных вызовов.
- Значение **n** зависит от текущего окружения.
- Каждый вызов **fact** решает более простую задачу, чем предыдущий: **n** уменьшается.

(Пример)



Интерактивная диаграмма

Итерации vs рекурсия

Итерации vs рекурсия

Итерация — это частный случай рекурсии.

Итерации vs рекурсия

Итерация — это частный случай рекурсии.

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Итерации vs рекурсия

Итерация — это частный случай рекурсии.

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Используя while:

Итерации vs рекурсия

Итерация — это частный случай рекурсии.

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Используя while:

```
def fact_iter(n):
    total, k = 1, 1
    while k <= n:
        total, k = total*k, k+1
    return total
```

Итерации vs рекурсия

Итерация — это частный случай рекурсии.

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Используя while:

```
def fact_iter(n):
    total, k = 1, 1
    while k <= n:
        total, k = total*k, k+1
    return total
```

Используя рекурсию:

Итерации vs рекурсия

Итерация — это частный случай рекурсии.

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Используя while:

```
def fact_iter(n):
    total, k = 1, 1
    while k <= n:
        total, k = total*k, k+1
    return total
```

Используя рекурсию:

```
def fact(n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return n * fact(n-1)
```

Итерации vs рекурсия

Итерация — это частный случай рекурсии.

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Используя while:

```
def fact_iter(n):
    total, k = 1, 1
    while k <= n:
        total, k = total*k, k+1
    return total
```

Используя рекурсию:

```
def fact(n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return n * fact(n-1)
```

Математически:

Итерации vs рекурсия

Итерация — это частный случай рекурсии.

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Используя while:

```
def fact_iter(n):
    total, k = 1, 1
    while k <= n:
        total, k = total*k, k+1
    return total
```

Используя рекурсию:

```
def fact(n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return n * fact(n-1)
```

Математически: $n! = \prod_{k=1}^{n} k$

Итерации vs рекурсия

Итерация — это частный случай рекурсии.

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Используя while:

```
def fact_iter(n):
    total, k = 1, 1
    while k <= n:
        total, k = total*k, k+1
    return total
```

Используя рекурсию:

```
def fact(n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return n * fact(n-1)
```

Математически:

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{otherwise} \end{cases}$$

Итерации vs рекурсия

Итерация — это частный случай рекурсии.

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Используя while:

```
def fact_iter(n):
    total, k = 1, 1
    while k <= n:
        total, k = total*k, k+1
    return total
```

Используя рекурсию:

```
def fact(n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return n * fact(n-1)
```

Математически:

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{otherwise} \end{cases}$$

Имена:

Итерации vs рекурсия

Итерация — это частный случай рекурсии.

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Используя while:

```
def fact_iter(n):
    total, k = 1, 1
    while k <= n:
        total, k = total*k, k+1
    return total
```

Используя рекурсию:

```
def fact(n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return n * fact(n-1)
```

Математически:

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{otherwise} \end{cases}$$

Имена: `n, total, k, fact_iter`

Итерации vs рекурсия

Итерация — это частный случай рекурсии.

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Используя while:

```
def fact_iter(n):
    total, k = 1, 1
    while k <= n:
        total, k = total*k, k+1
    return total
```

Используя рекурсию:

```
def fact(n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return n * fact(n-1)
```

Математически:

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{otherwise} \end{cases}$$

Имена: `n, total, k, fact_iter`

`n, fact`

Проверка рекурсивных функций

Рекурсивный «прыжок веры»

Рекурсивный «прыжок веры»

Фото Кевина Ли, Прекестулен, Норвегия

Рекурсивный «прыжок веры»

Фото Кевина Ли, Прекестулен, Норвегия

Рекурсивный «прыжок веры»

```
def fact(n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return n * fact(n-1)
```

Фото Кевина Ли, Прекестулен, Норвегия

Рекурсивный «прыжок веры»

```
def fact(n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return n * fact(n-1)
```

Корректна ли функция **fact**?

Фото Кевина Ли, Прекестулен, Норвегия

Рекурсивный «прыжок веры»

```
def fact(n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return n * fact(n-1)
```

Корректна ли функция **fact**?

1. Проверь простой случай.

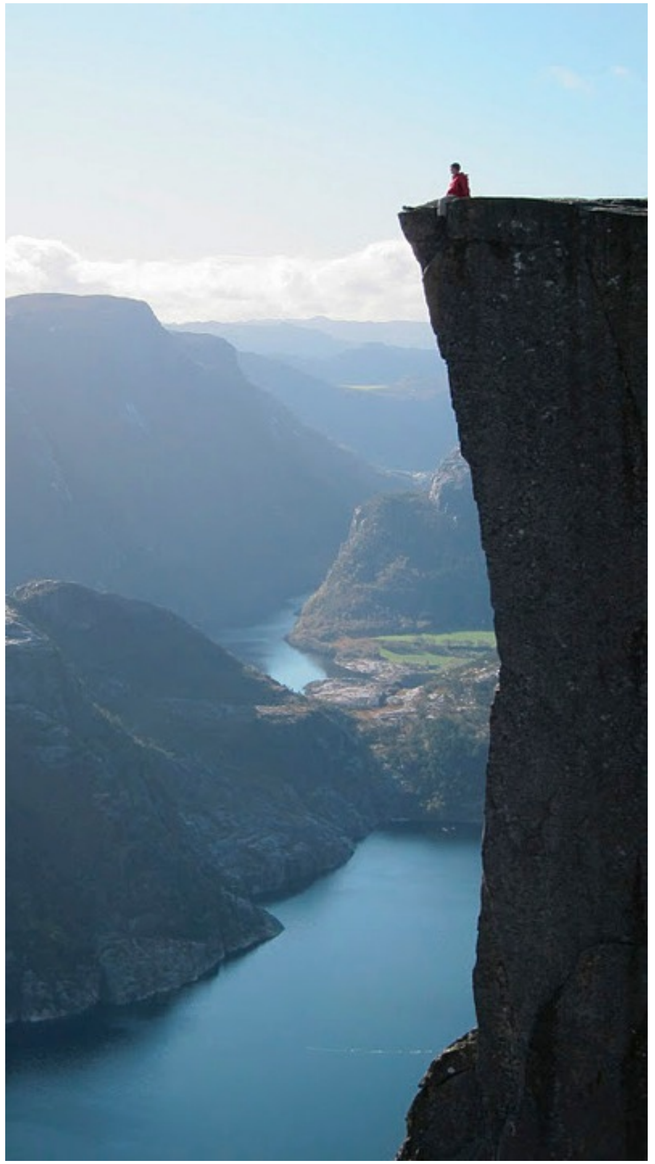


Фото Кевина Ли, Прекестулен, Норвегия

Рекурсивный «прыжок веры»

```
def fact(n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return n * fact(n-1)
```

Корректна ли функция **fact**?

1. Проверь простой случай.

2. Считай **fact** функциональной абстракцией!

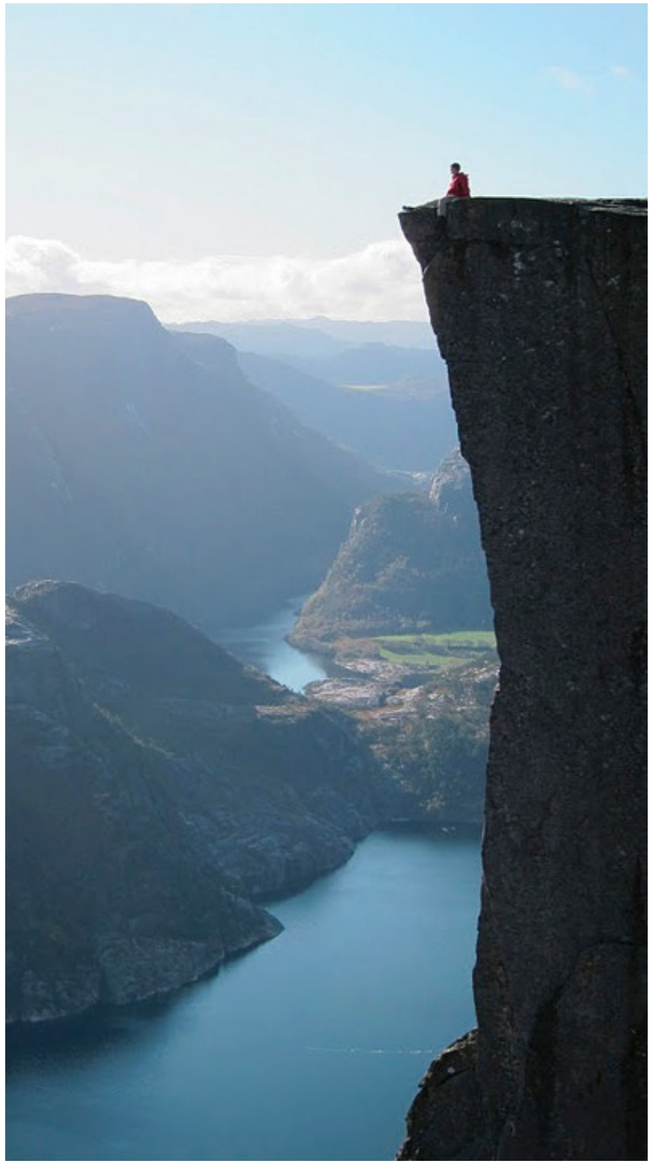


Фото Кевина Ли, Прекестулен, Норвегия

Рекурсивный «прыжок веры»

```
def fact(n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return n * fact(n-1)
```

Корректна ли функция **fact**?

1. Проверь простой случай.

2. Считай **fact** функциональной абстракцией!

3. Предположи, что **fact(n-1)** дает правильный результат.

Фото Кевина Ли, Прекестулен, Норвегия

Рекурсивный «прыжок веры»

```
def fact(n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return n * fact(n-1)
```

Корректна ли функция **fact**?

1. Проверь простой случай.

2. Считай **fact** функциональной абстракцией!

3. Предположи, что **fact(n-1)** дает правильный результат.

4. Проверь, что результат **fact(n)** правильно задан в терминах **fact(n-1)**.

Фото Кевина Ли, Прекестулен, Норвегия

Проверяем суммирование цифр

```
def sum_digits(n):
    """Возвращает сумму цифр положительного целого n."""
    if n < 10:
        return n
    else:
        all_but_last, last = split(n)
        return sum_digits(all_but_last) + last
```

Проверяем суммирование цифр

Функция sum_digits вычисляет сумму цифр положительного n правильно, поскольку:

```
def sum_digits(n):
    """Возвращает сумму цифр положительного целого n."""
    if n < 10:
        return n
    else:
        all_but_last, last = split(n)
        return sum_digits(all_but_last) + last
```

Проверяем суммирование цифр

Функция sum_digits вычисляет сумму цифр положительного n правильно, поскольку:

Сумма цифр  **(простой случай)**

```
def sum_digits(n):
    """Возвращает сумму цифр положительного целого n."""
    if n < 10:
        return n
    else:
        all_but_last, last = split(n)
        return sum_digits(all_but_last) + last
```

Проверяем суммирование цифр

Функция sum_digits вычисляет сумму цифр положительного n правильно, поскольку:

Сумма цифр [redacted] **(простой случай)**

Предполагая, что [redacted] **(абстракция)**

[redacted]

[redacted]

```
def sum_digits(n):
    """Возвращает сумму цифр положительного целого n."""
    if n < 10:
        return n
    else:
        all_but_last, last = split(n)
        return sum_digits(all_but_last) + last
```

Проверяем суммирование цифр

Функция sum_digits вычисляет сумму цифр положительного n правильно, поскольку:

Сумма цифр [redacted] **(простой случай)**

Предполагая, что [redacted] **(абстракция)**

для всех [redacted] **(предположение)**

[redacted]

```
def sum_digits(n):
    """Возвращает сумму цифр положительного целого n."""
    if n < 10:
        return n
    else:
        all_but_last, last = split(n)
        return sum_digits(all_but_last) + last
```

Проверяем суммирование цифр

Функция sum_digits вычисляет сумму цифр положительного n правильно, поскольку:

Сумма цифр  **(простой случай)**

Предполагая, что  **(абстракция)**

для всех  **(предположение)**

sum_digits(n) будет равно  **(вывод)**

```
def sum_digits(n):
    """Возвращает сумму цифр положительного целого n."""
    if n < 10:
        return n
    else:
        all_but_last, last = split(n)
        return sum_digits(all_but_last) + last
```

Проверяем суммирование цифр

Функция sum_digits вычисляет сумму цифр положительного n правильно, поскольку:

Сумма цифр любого n < 10 равна n. **(простой случай)**

Предполагая, что [redacted] **(абстракция)**

для всех [redacted] **(предположение)**

sum_digits(n) будет равно [redacted] **(вывод)**

```
def sum_digits(n):
    """Возвращает сумму цифр положительного целого n."""
    if n < 10:
        return n
    else:
        all_but_last, last = split(n)
        return sum_digits(all_but_last) + last
```

Проверяем суммирование цифр

Функция sum_digits вычисляет сумму цифр положительного n правильно, поскольку:

Сумма цифр любого n < 10 равна n. **(простой случай)**

Предполагая, что sum_digits(k) правильно суммирует цифры k **(абстракция)**

для всех [redacted] **(предположение)**

sum_digits(n) будет равно [redacted] **(вывод)**

```
def sum_digits(n):
    """Возвращает сумму цифр положительного целого n."""
    if n < 10:
        return n
    else:
        all_but_last, last = split(n)
        return sum_digits(all_but_last) + last
```

Проверяем суммирование цифр

Функция sum_digits вычисляет сумму цифр положительного n правильно, поскольку:

Сумма цифр любого n < 10 равна n. **(простой случай)**

Предполагая, что sum_digits(k) правильно суммирует цифры k **(абстракция)**

для всех k с меньшим количеством цифр, чем в n, **(предположение)**

sum_digits(n) будет равно [redacted] **(вывод)**

```
def sum_digits(n):
    """Возвращает сумму цифр положительного целого n."""
    if n < 10:
        return n
    else:
        all_but_last, last = split(n)
        return sum_digits(all_but_last) + last
```

Проверяем суммирование цифр

Функция sum_digits вычисляет сумму цифр положительного n правильно, поскольку:

Сумма цифр любого n < 10 равна n. **(простой случай)**

Предполагая, что sum_digits(k) правильно суммирует цифры k **(абстракция)**

для всех k с меньшим количеством цифр, чем в n, **(предположение)**

sum_digits(n) будет равно sum_digits(n//10) плюс последняя цифра в n. **(вывод)**

```
def sum_digits(n):
    """Возвращает сумму цифр положительного целого n."""
    if n < 10:
        return n
    else:
        all_but_last, last = split(n)
        return sum_digits(all_but_last) + last
```

Взаимная рекурсия

Алгоритм Луна

Алгоритм Луна

Используется для проверки номеров пластиковых карточек.

Алгоритм Луна

Используется для проверки номеров пластиковых карточек.

Из Википедии: https://ru.wikipedia.org/wiki/Алгоритм_Луна

Алгоритм Луна

Используется для проверки номеров пластиковых карточек.

Из Википедии: https://ru.wikipedia.org/wiki/Алгоритм_Луна

- Цифры проверяемой последовательности нумеруются справа налево. Цифры, оказавшиеся на нечётных местах, остаются без изменений. Цифры, стоящие на чётных местах, умножаются на 2. Если в результате такого умножения возникает число больше 9 (например, 7 * 2 = 14), оно заменяется суммой цифр получившегося произведения — однозначным числом, т. е. цифрой (например, 10: 1 + 0 = 1, 14: 1 + 4 = 5).

Алгоритм Луна

Используется для проверки номеров пластиковых карточек.

Из Википедии: https://ru.wikipedia.org/wiki/Алгоритм_Луна

- Цифры проверяемой последовательности нумеруются справа налево. Цифры, оказавшиеся на нечётных местах, остаются без изменений. Цифры, стоящие на чётных местах, умножаются на 2. Если в результате такого умножения возникает число больше 9 (например, 7 * 2 = 14), оно заменяется суммой цифр получившегося произведения — однозначным числом, т. е. цифрой (например, 10: 1 + 0 = 1, 14: 1 + 4 = 5).

- Все полученные в результате преобразования цифры складываются.

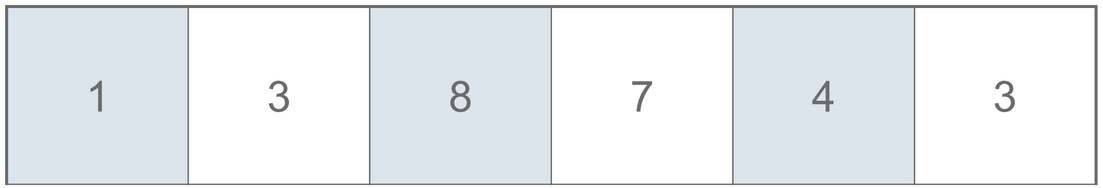
Алгоритм Луна

Используется для проверки номеров пластиковых карточек.

Из Википедии: https://ru.wikipedia.org/wiki/Алгоритм_Луна

- Цифры проверяемой последовательности нумеруются справа налево. Цифры, оказавшиеся на нечётных местах, остаются без изменений. Цифры, стоящие на чётных местах, умножаются на 2. Если в результате такого умножения возникает число больше 9 (например, 7 * 2 = 14), оно заменяется суммой цифр получившегося произведения — однозначным числом, т. е. цифрой (например, 10: 1 + 0 = 1, 14: 1 + 4 = 5).

- Все полученные в результате преобразования цифры складываются.



Алгоритм Луна

Используется для проверки номеров пластиковых карточек.

Из Википедии: https://ru.wikipedia.org/wiki/Алгоритм_Луна

- Цифры проверяемой последовательности нумеруются справа налево. Цифры, оказавшиеся на нечётных местах, остаются без изменений. Цифры, стоящие на чётных местах, умножаются на 2. Если в результате такого умножения возникает число больше 9 (например, 7 * 2 = 14), оно заменяется суммой цифр получившегося произведения — однозначным числом, т. е. цифрой (например, 10: 1 + 0 = 1, 14: 1 + 4 = 5).

- Все полученные в результате преобразования цифры складываются.

1	3	8	7	4	3
2	3	1+6=7	7	8	3

Алгоритм Луна

Используется для проверки номеров пластиковых карточек.

Из Википедии: https://ru.wikipedia.org/wiki/Алгоритм_Луна

- Цифры проверяемой последовательности нумеруются справа налево. Цифры, оказавшиеся на нечётных местах, остаются без изменений. Цифры, стоящие на чётных местах, умножаются на 2. Если в результате такого умножения возникает число больше 9 (например, 7 * 2 = 14), оно заменяется суммой цифр получившегося произведения — однозначным числом, т. е. цифрой (например, 10: 1 + 0 = 1, 14: 1 + 4 = 5).

- Все полученные в результате преобразования цифры складываются.

1	3	8	7	4	3
2	3	1+6=7	7	8	3

= 30

Алгоритм Луна

Используется для проверки номеров пластиковых карточек.

Из Википедии: https://ru.wikipedia.org/wiki/Алгоритм_Луна

- Цифры проверяемой последовательности нумеруются справа налево. Цифры, оказавшиеся на нечётных местах, остаются без изменений. Цифры, стоящие на чётных местах, умножаются на 2. Если в результате такого умножения возникает число больше 9 (например, 7 * 2 = 14), оно заменяется суммой цифр получившегося произведения — однозначным числом, т. е. цифрой (например, 10: 1 + 0 = 1, 14: 1 + 4 = 5).

- Все полученные в результате преобразования цифры складываются.

1	3	8	7	4	3
2	3	1+6=7	7	8	3

= 30

Если сумма кратна 10, то исходные данные верны.

Алгоритм Луна

Используется для проверки номеров пластиковых карточек.

Из Википедии: https://ru.wikipedia.org/wiki/Алгоритм_Луна

- Цифры проверяемой последовательности нумеруются справа налево. Цифры, оказавшиеся на нечётных местах, остаются без изменений. Цифры, стоящие на чётных местах, умножаются на 2. Если в результате такого умножения возникает число больше 9 (например, 7 * 2 = 14), оно заменяется суммой цифр получившегося произведения — однозначным числом, т. е. цифрой (например, 10: 1 + 0 = 1, 14: 1 + 4 = 5).

- Все полученные в результате преобразования цифры складываются.

1	3	8	7	4	3
2	3	1+6=7	7	8	3

= 30

Если сумма кратна 10, то исходные данные верны. (Пример)

Рекурсия и итерация

Перевод рекурсии в итерацию

Перевод рекурсии в итерацию

Может быть непростым: итерация — частный случай рекурсии.

Перевод рекурсии в итерацию

Может быть непростым: итерация — частный случай рекурсии.

Идея: определить, какое состояние должно переходить от итерации к итерации.

Перевод рекурсии в итерацию

Может быть непростым: итерация — частный случай рекурсии.

Идея: определить, какое состояние должно переходить от итерации к итерации.

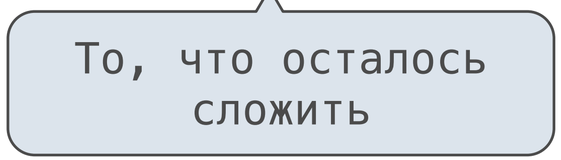
```
def sum_digits(n):
    """Возвращает сумму цифр положительного целого n."""
    if n < 10:
        return n
    else:
        all_but_last, last = split(n)
        return sum_digits(all_but_last) + last
```

Перевод рекурсии в итерацию

Может быть непростым: итерация — частный случай рекурсии.

Идея: определить, какое состояние должно переходить от итерации к итерации.

```
def sum_digits(n):
    """Возвращает сумму цифр положительного целого n."""
    if n < 10:
        return n
    else:
        all_but_last, last = split(n)
        return sum_digits(all_but_last) + last
```



Перевод рекурсии в итерацию

Может быть непростым: итерация — частный случай рекурсии.

Идея: определить, какое состояние должно переходить от итерации к итерации.

```
def sum_digits(n):
    """Возвращает сумму цифр положительного целого n."""
    if n < 10:
        return n
    else:
        all_but_last, last = split(n)
        return sum_digits(all_but_last) + last
```

Частичная сумма

То, что осталось сложить

Перевод рекурсии в итерацию

Может быть непростым: итерация — частный случай рекурсии.

Идея: определить, какое состояние должно переходить от итерации к итерации.

```
def sum_digits(n):
    """Возвращает сумму цифр положительного целого n."""
    if n < 10:
        return n
    else:
        all_but_last, last = split(n)
        return sum_digits(all_but_last) + last
```

Частичная сумма

То, что осталось сложить

(Пример)

Перевод итерации в рекурсию

Перевод итерации в рекурсию

Более формален: итерация — частный случай рекурсии.

Перевод итерации в рекурсию

Более формален: итерация — частный случай рекурсии.

Идея: состояние от итерации к итерации может передаваться через аргументы.

Перевод итерации в рекурсию

Более формален: итерация — частный случай рекурсии.

Идея: состояние от итерации к итерации может передаваться через аргументы.

```
def sum_digits_iter(n):
    digit_sum = 0
    while n > 0:
        n, last = split(n)
        digit_sum = digit_sum + last
    return digit_sum
```

Перевод итерации в рекурсию

Более формален: итерация — частный случай рекурсии.

Идея: состояние от итерации к итерации может передаваться через аргументы.

```
def sum_digits_iter(n):
    digit_sum = 0
    while n > 0:
        n, last = split(n)
        digit_sum = digit_sum + last
    return digit_sum
```

```
def sum_digits_rec(n, digit_sum):
    if n == 0:
        return digit_sum
    else:
        n, last = split(n)
        return sum_digits_rec(n, digit_sum + last)
```

Перевод итерации в рекурсию

Более формален: итерация — частный случай рекурсии.

Идея: состояние от итерации к итерации может передаваться через аргументы.

```
def sum_digits_iter(n):
    digit_sum = 0
    while n > 0:
        n, last = split(n)
        digit_sum = digit_sum + last
    return digit_sum
```

Обновления через присвоения становятся...

```
def sum_digits_rec(n, digit_sum):
    if n == 0:
        return digit_sum
    else:
        n, last = split(n)
        return sum_digits_rec(n, digit_sum + last)
```

Перевод итерации в рекурсию

Более формален: итерация — частный случай рекурсии.

Идея: состояние от итерации к итерации может передаваться через аргументы.

```
def sum_digits_iter(n):
    digit_sum = 0
    while n > 0:
        n, last = split(n)
        digit_sum = digit_sum + last
    return digit_sum
```

Обновления через присвоения становятся...

```
def sum_digits_rec(n, digit_sum):
    if n == 0:
        return digit_sum
    else:
        n, last = split(n)
        return sum_digits_rec(n, digit_sum + last)
```

...аргументами рекурсивного вызова