

## Дополнительная лекция 1

---

# Метод Ньютона

# Основы метода Ньютона

---

Быстро находит точные аппроксимации нулей дифференцируемой функции!

# Основы метода Ньютона

---

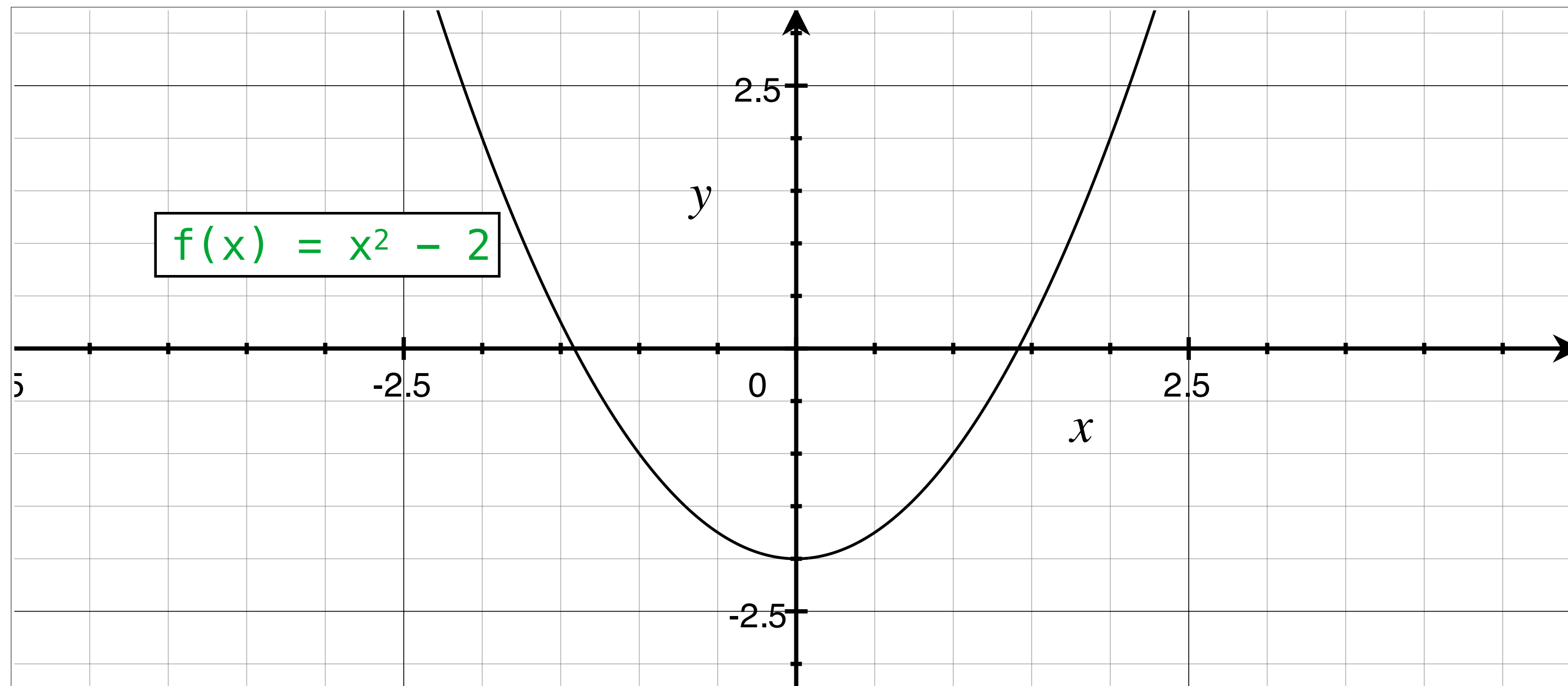
Быстро находит точные аппроксимации нулей дифференцируемой функции!

$$f(x) = x^2 - 2$$

# Основы метода Ньютона

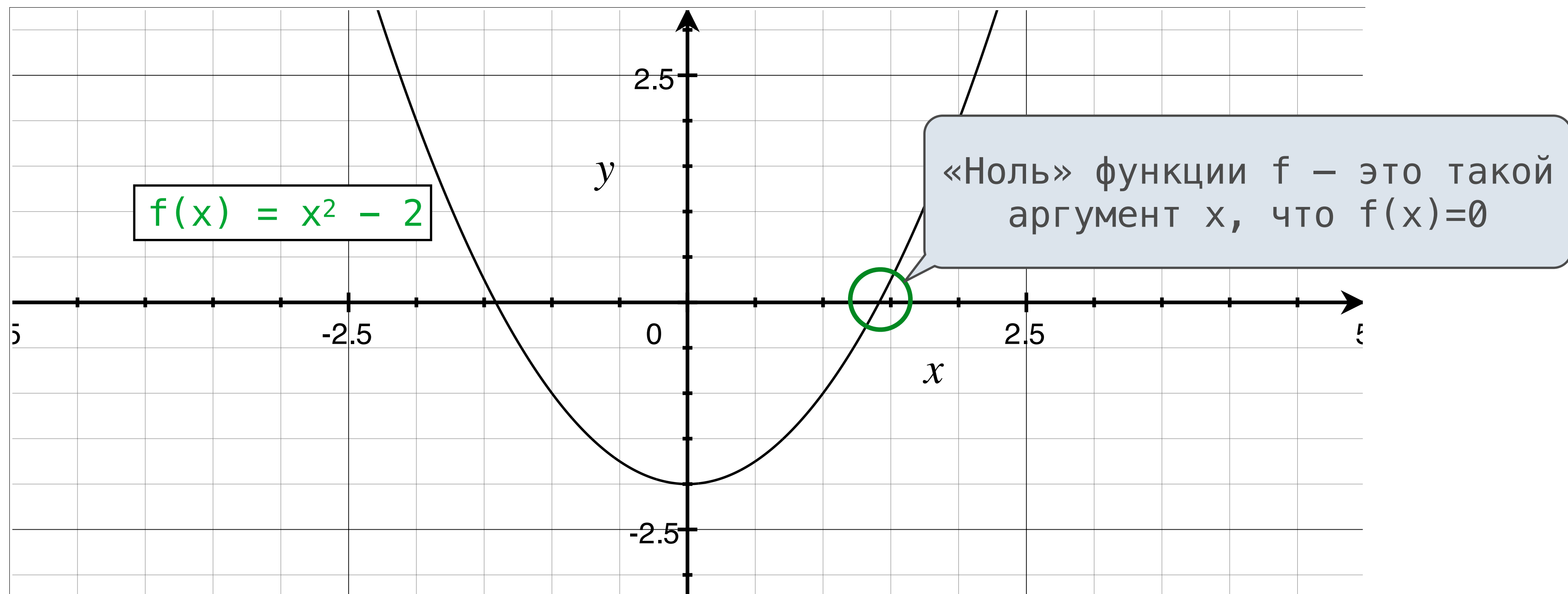
---

Быстро находит точные аппроксимации нулей дифференцируемой функции!



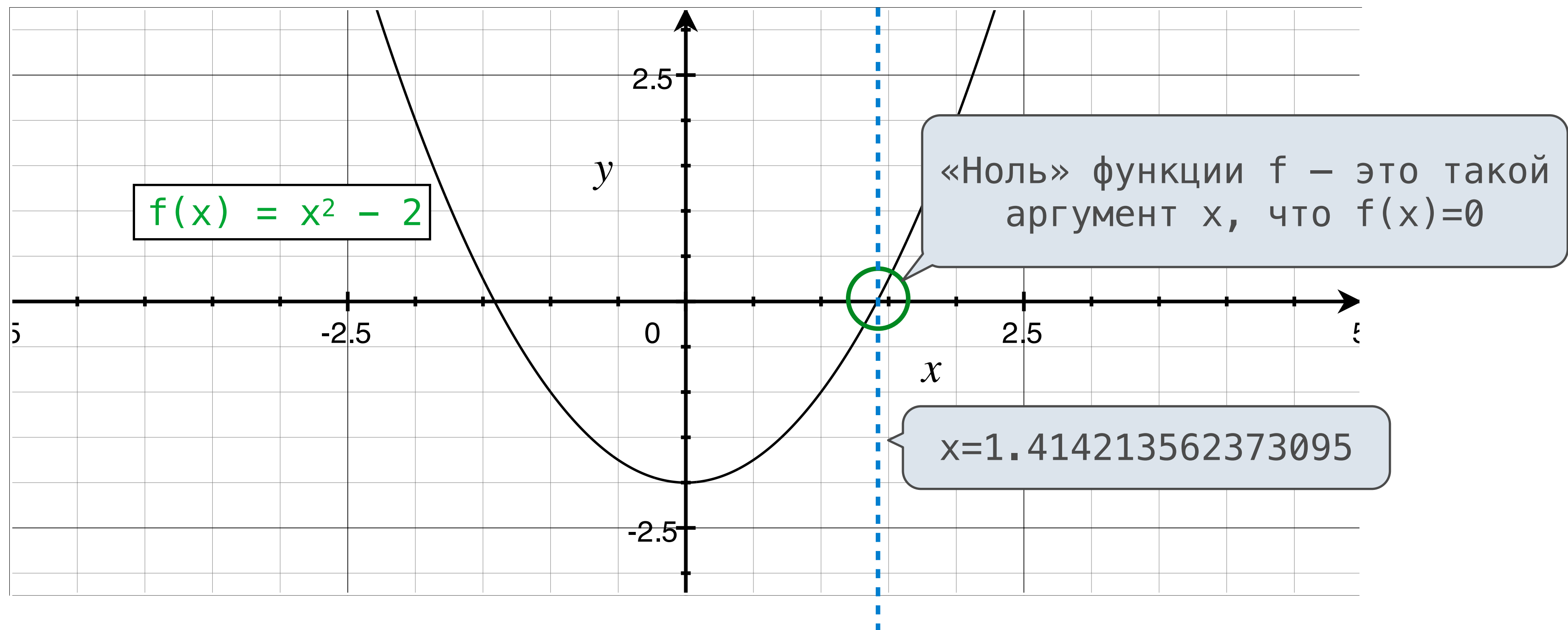
# Основы метода Ньютона

Быстро находит точные аппроксимации нулей дифференцируемой функции!



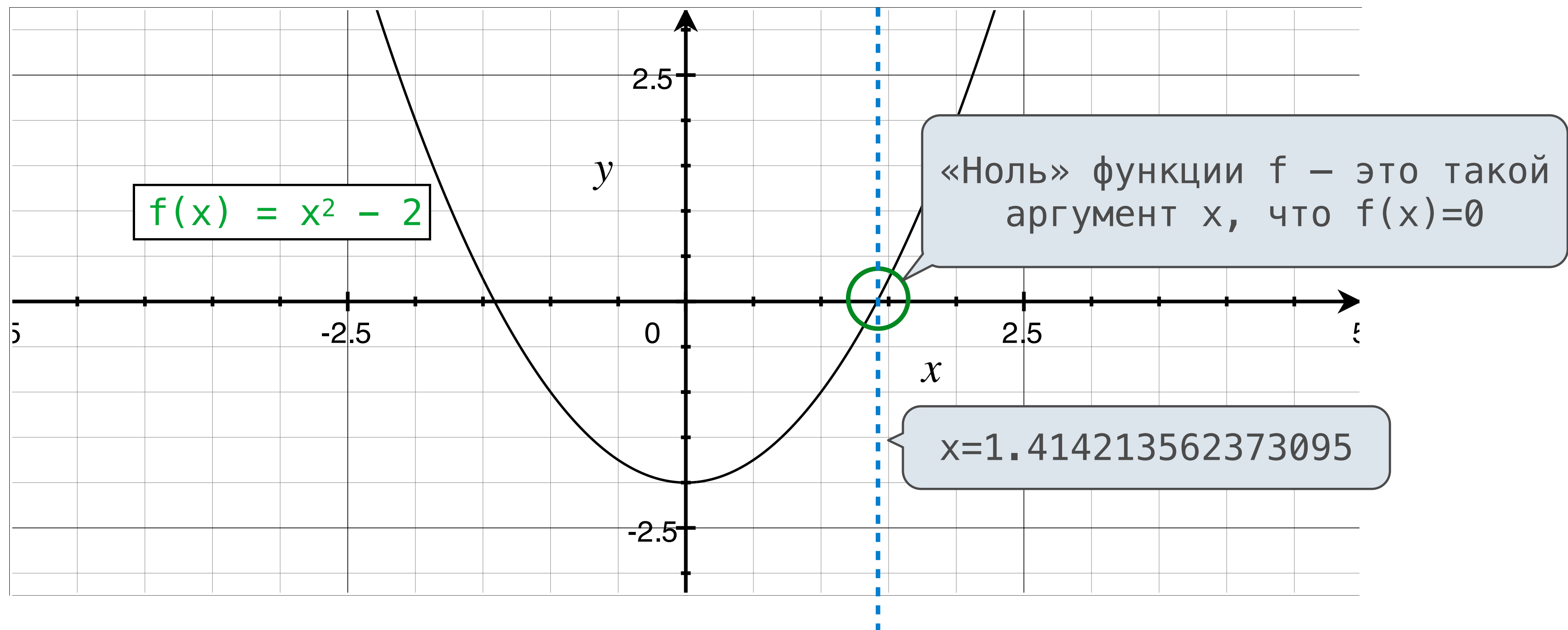
# Основы метода Ньютона

Быстро находит точные аппроксимации нулей дифференцируемой функции!



# Основы метода Ньютона

Быстро находит точные аппроксимации нулей дифференцируемой функции!

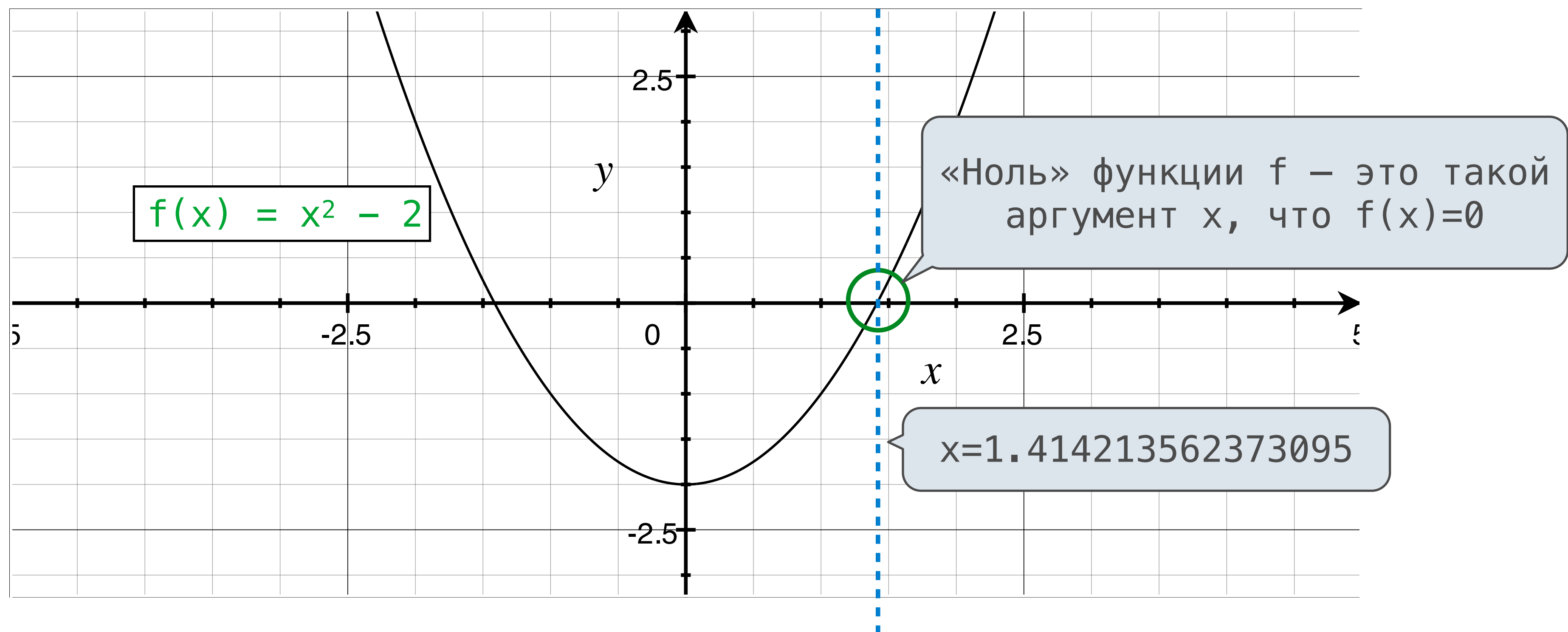


Применение: метод для вычисления квадратных корней, кубических корней и т.д.



# Основы метода Ньютона

Быстро находит точные аппроксимации нулей дифференцируемой функции!



Применение: метод для вычисления квадратных корней, кубических корней и т.д.

Положительным нулём  $f(x) = x^2 - a$  является  $\sqrt{a}$ . (Решается уравнение  $x^2 = a$ ).

## Метод Ньютона

---

Дана функция  $f$  и начальное приближение  $x$ ,

## Метод Ньютона

---

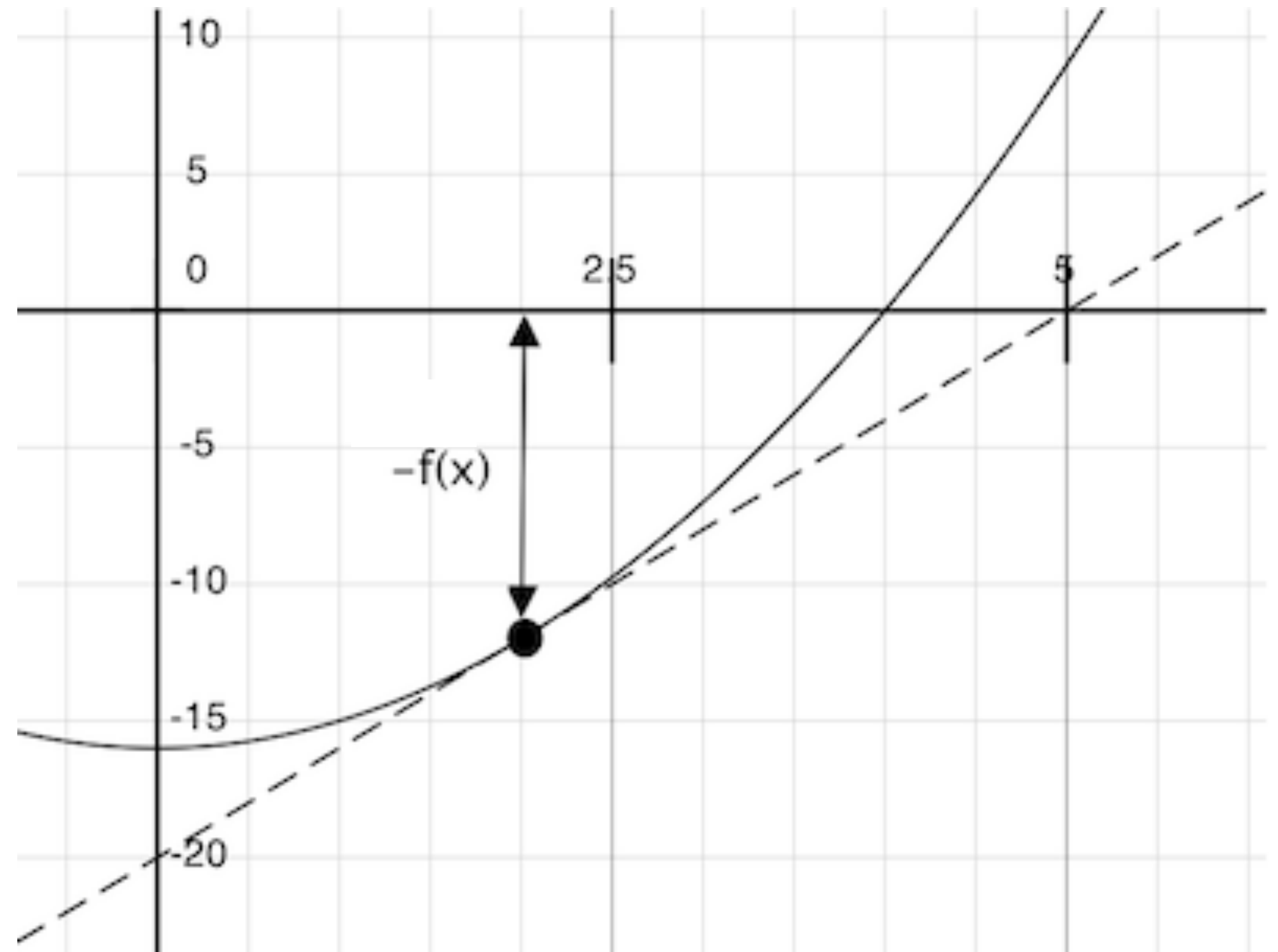
Дана функция  $f$  и начальное приближение  $x$ ,

Итеративно «улучшаем»  $x$ :

# Метод Ньютона

Дана функция  $f$  и начальное приближение  $x$ ,

Итеративно «улучшаем»  $x$ :

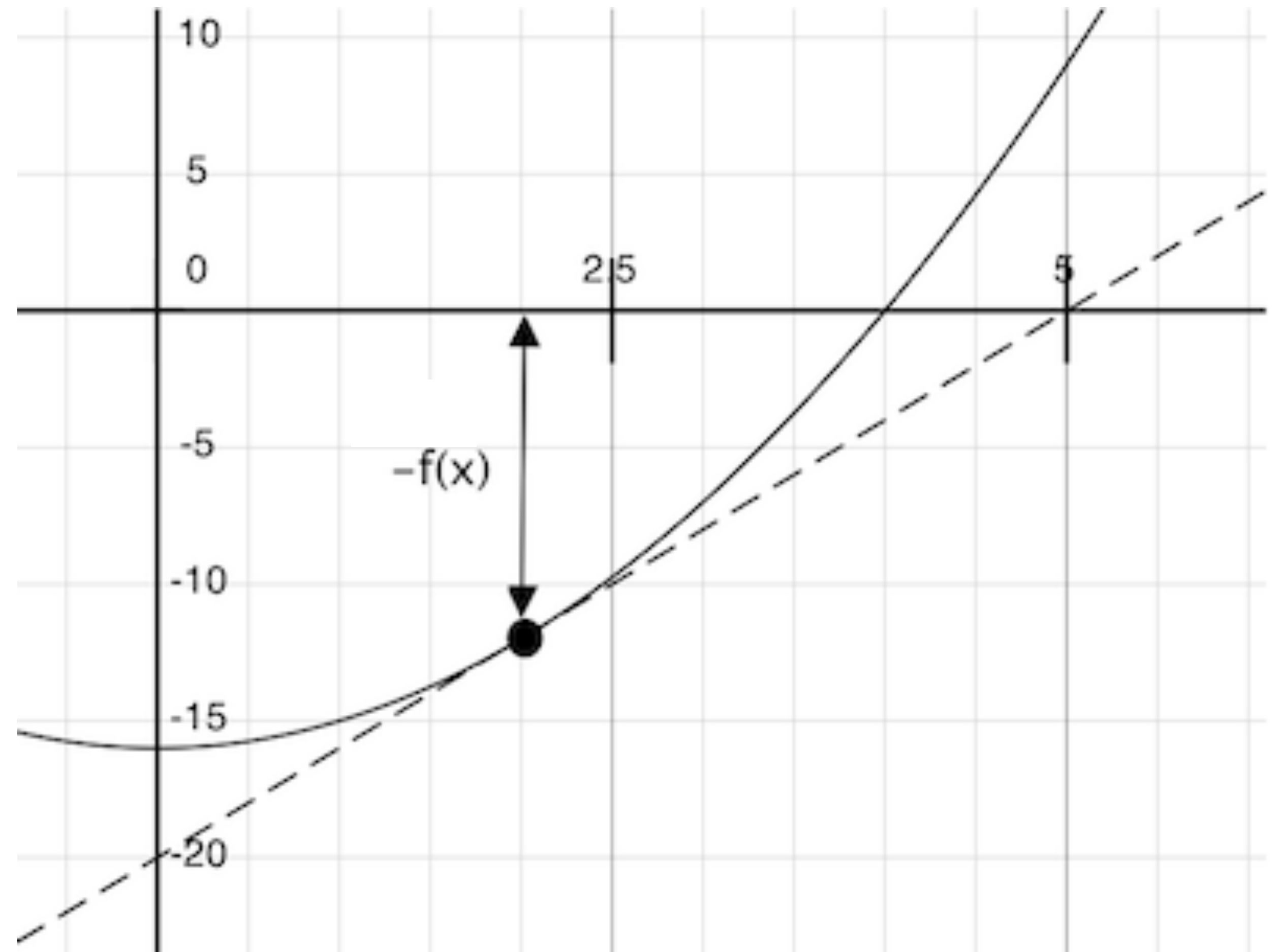


# Метод Ньютона

Дана функция  $f$  и начальное приближение  $x$ ,

Итеративно «улучшаем»  $x$ :

Вычисляется значение  $f$   
в точке  $x$ :  $f(x)$



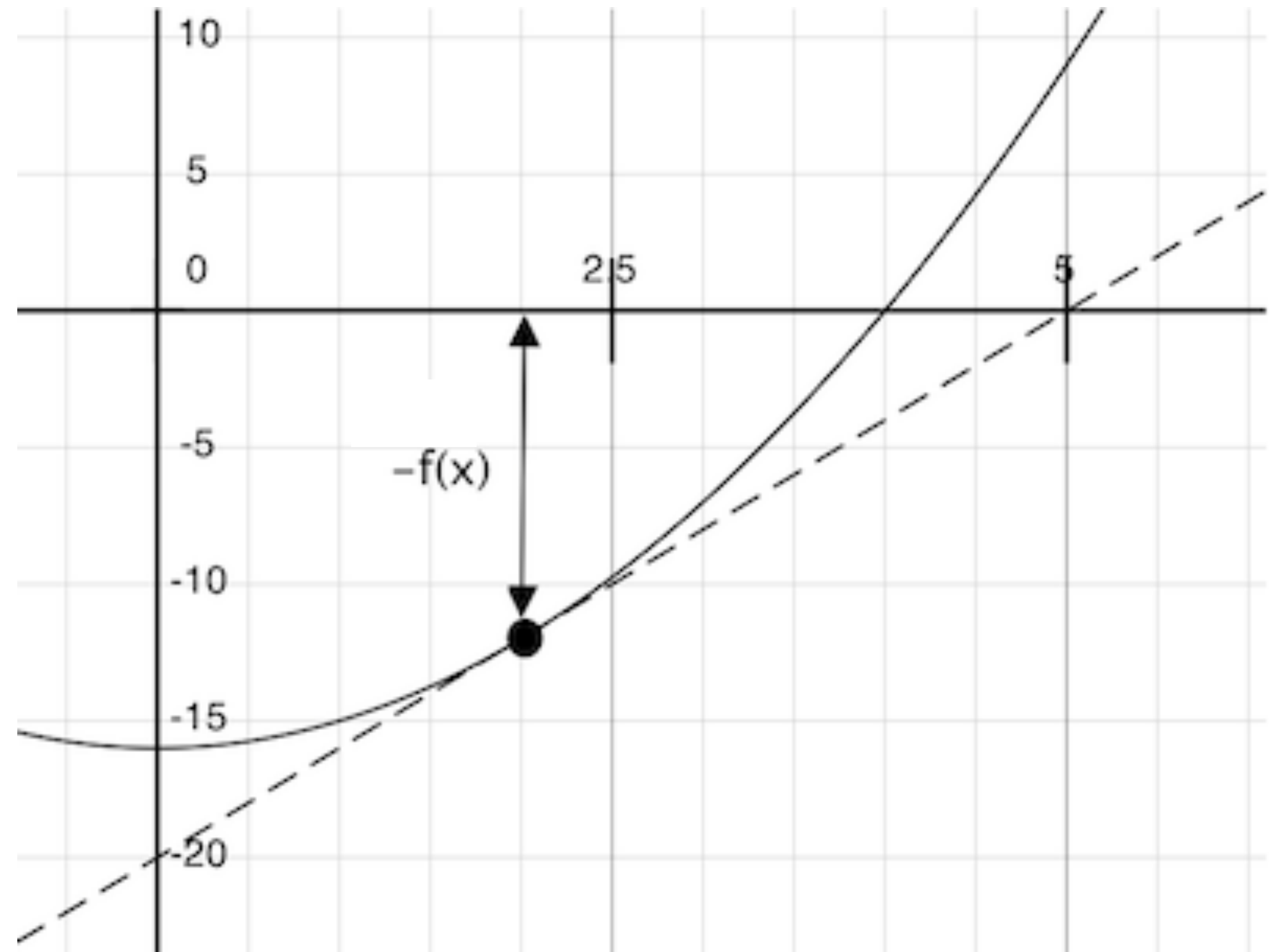
# Метод Ньютона

Дана функция  $f$  и начальное приближение  $x$ ,

Итеративно «улучшаем»  $x$ :

Вычисляется значение  $f$   
в точке  $x$ :  $f(x)$

Вычисляется значение  
производной функции  $f$   
в точке  $x$ :  $f'(x)$



# Метод Ньютона

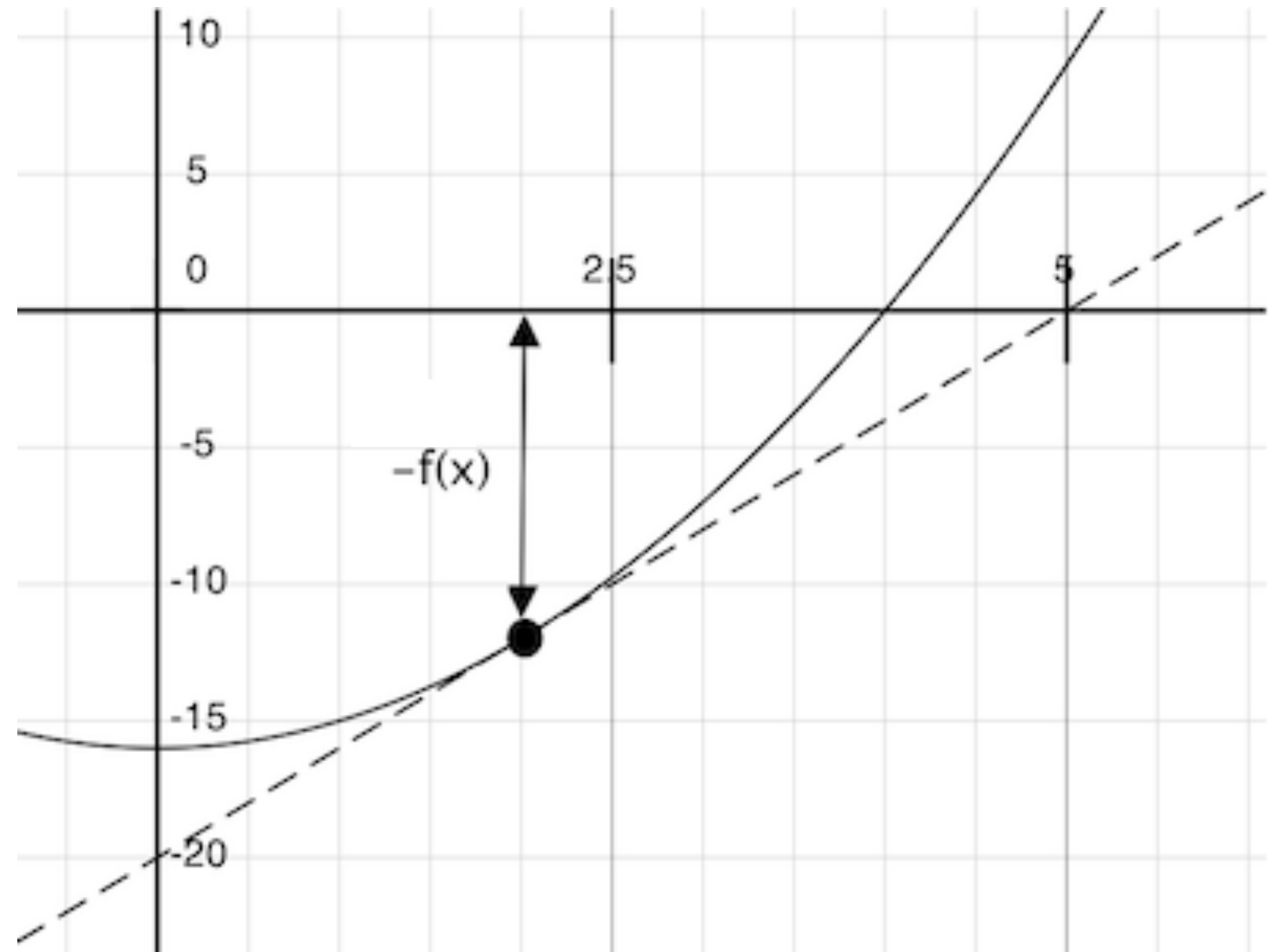
Дана функция  $f$  и начальное приближение  $x$ ,

Итеративно «улучшаем»  $x$ :

Вычисляется значение  $f$   
в точке  $x$ :  $f(x)$

Вычисляется значение  
производной функции  $f$   
в точке  $x$ :  $f'(x)$

Приближение  $x$   
изменяется на:  $x - \frac{f(x)}{f'(x)}$



# Метод Ньютона

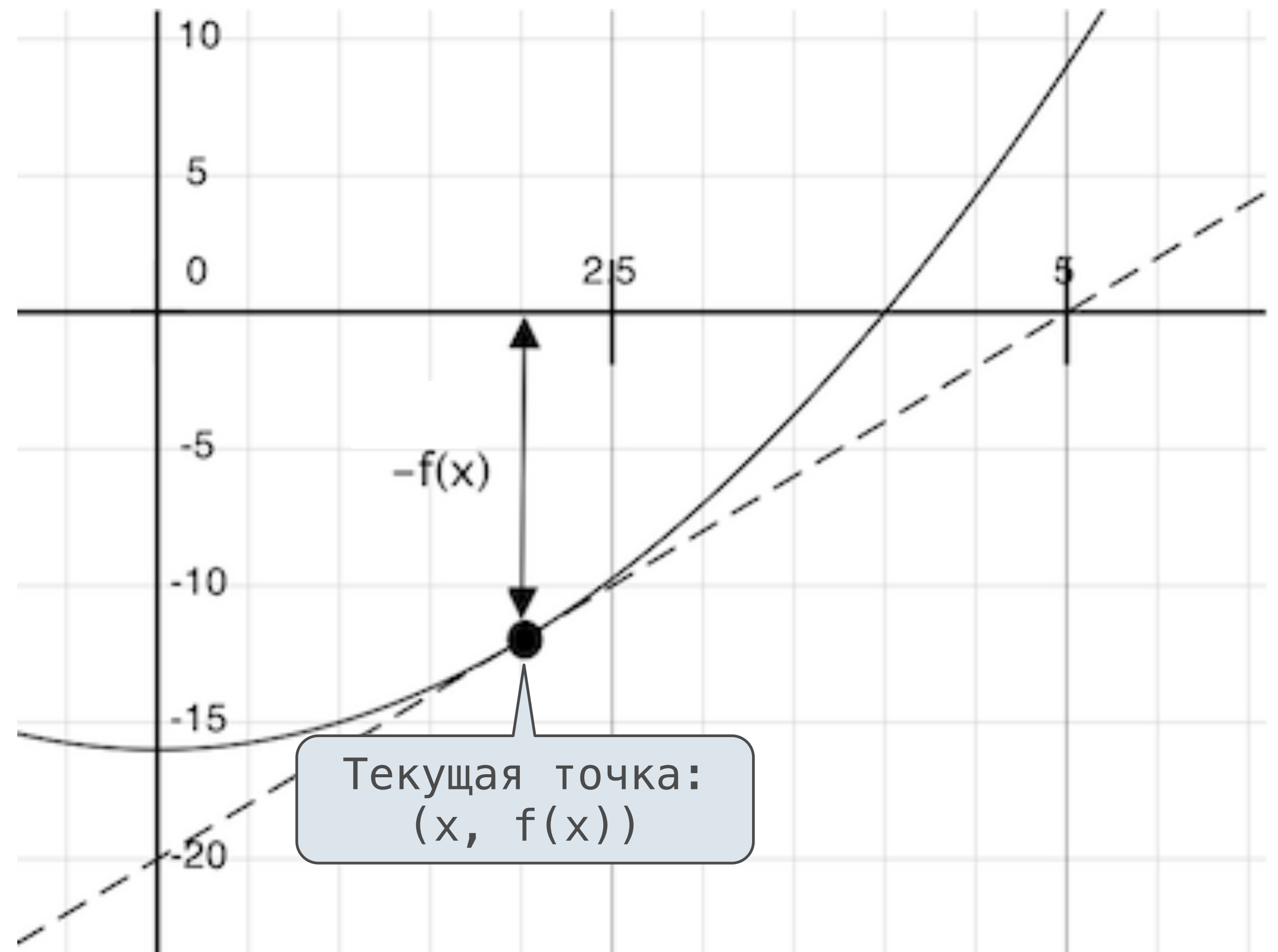
Дана функция  $f$  и начальное приближение  $x$ ,

Итеративно «улучшаем»  $x$ :

Вычисляется значение  $f$   
в точке  $x$ :  $f(x)$

Вычисляется значение  
производной функции  $f$   
в точке  $x$ :  $f'(x)$

Приближение  $x$   
изменяется на:  $x - \frac{f(x)}{f'(x)}$





# Метод Ньютона

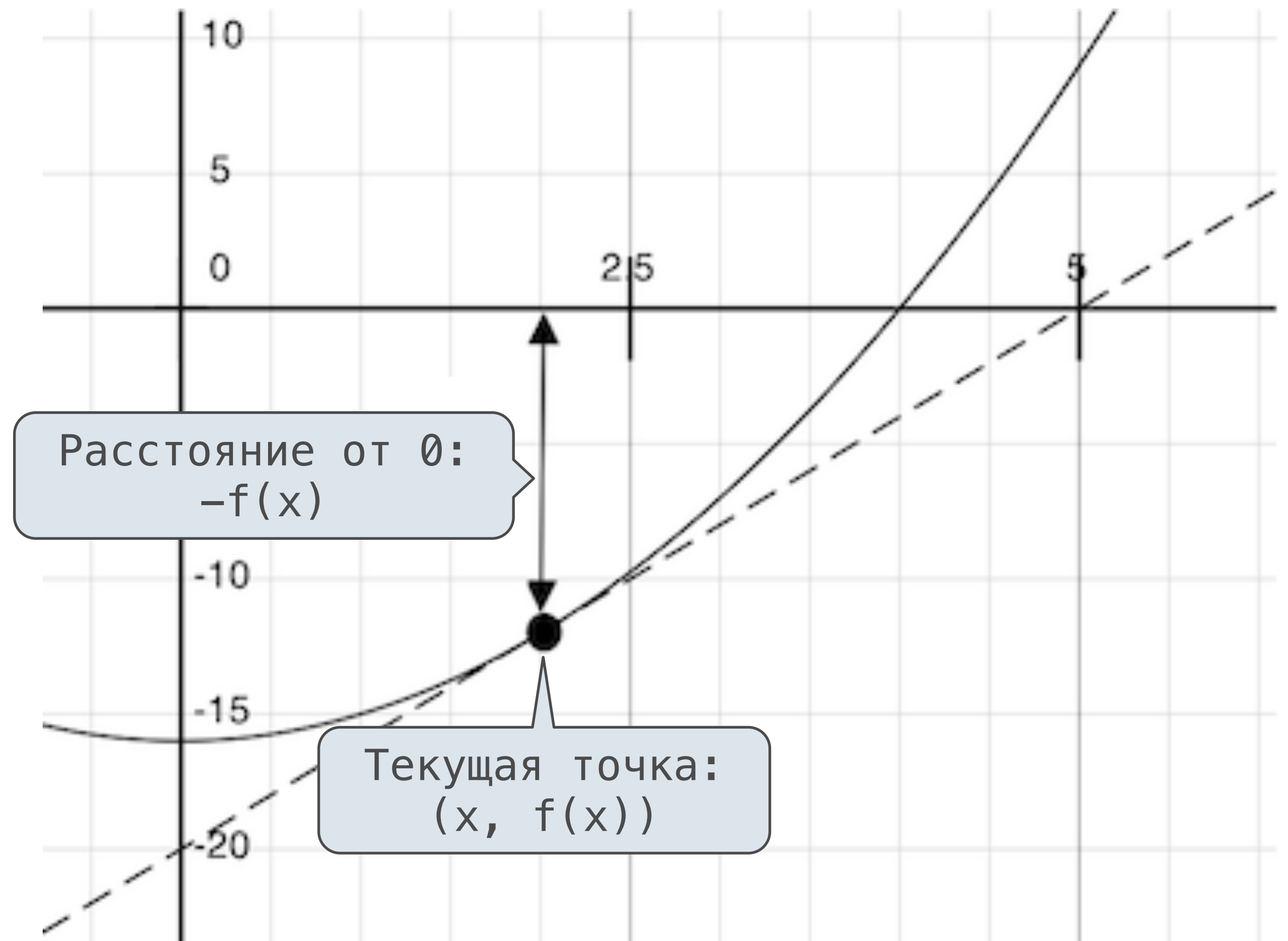
Дана функция  $f$  и начальное приближение  $x$ ,

Итеративно «улучшаем»  $x$ :

Вычисляется значение  $f$   
в точке  $x$ :  $f(x)$

Вычисляется значение  
производной функции  $f$   
в точке  $x$ :  $f'(x)$

Приближение  $x$   
изменяется на:  $x - \frac{f(x)}{f'(x)}$



# Метод Ньютона

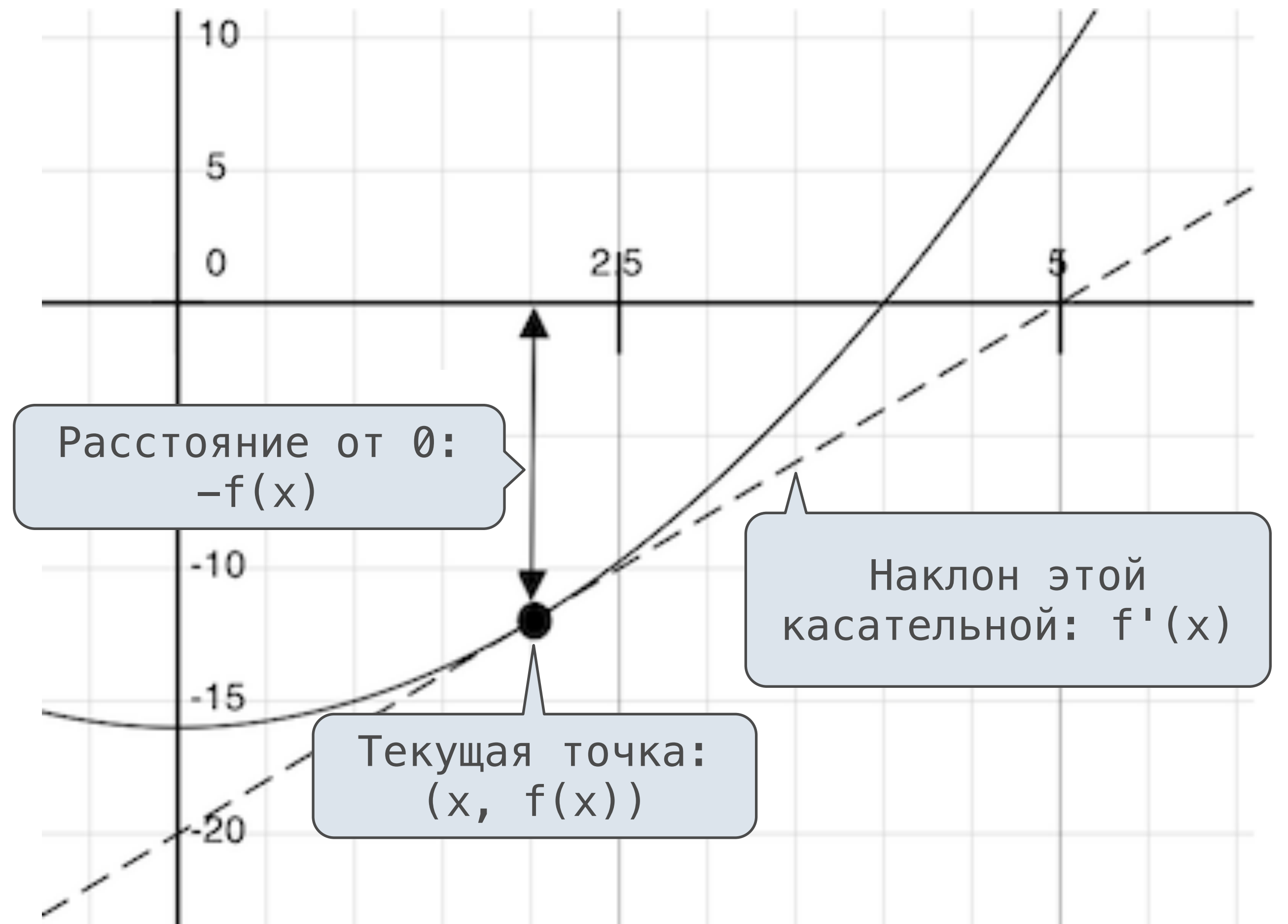
Дана функция  $f$  и начальное приближение  $x$ ,

Итеративно «улучшаем»  $x$ :

Вычисляется значение  $f$   
в точке  $x$ :  $f(x)$

Вычисляется значение  
производной функции  $f$   
в точке  $x$ :  $f'(x)$

Приближение  $x$   
изменяется на:  $x - \frac{f(x)}{f'(x)}$



# Метод Ньютона

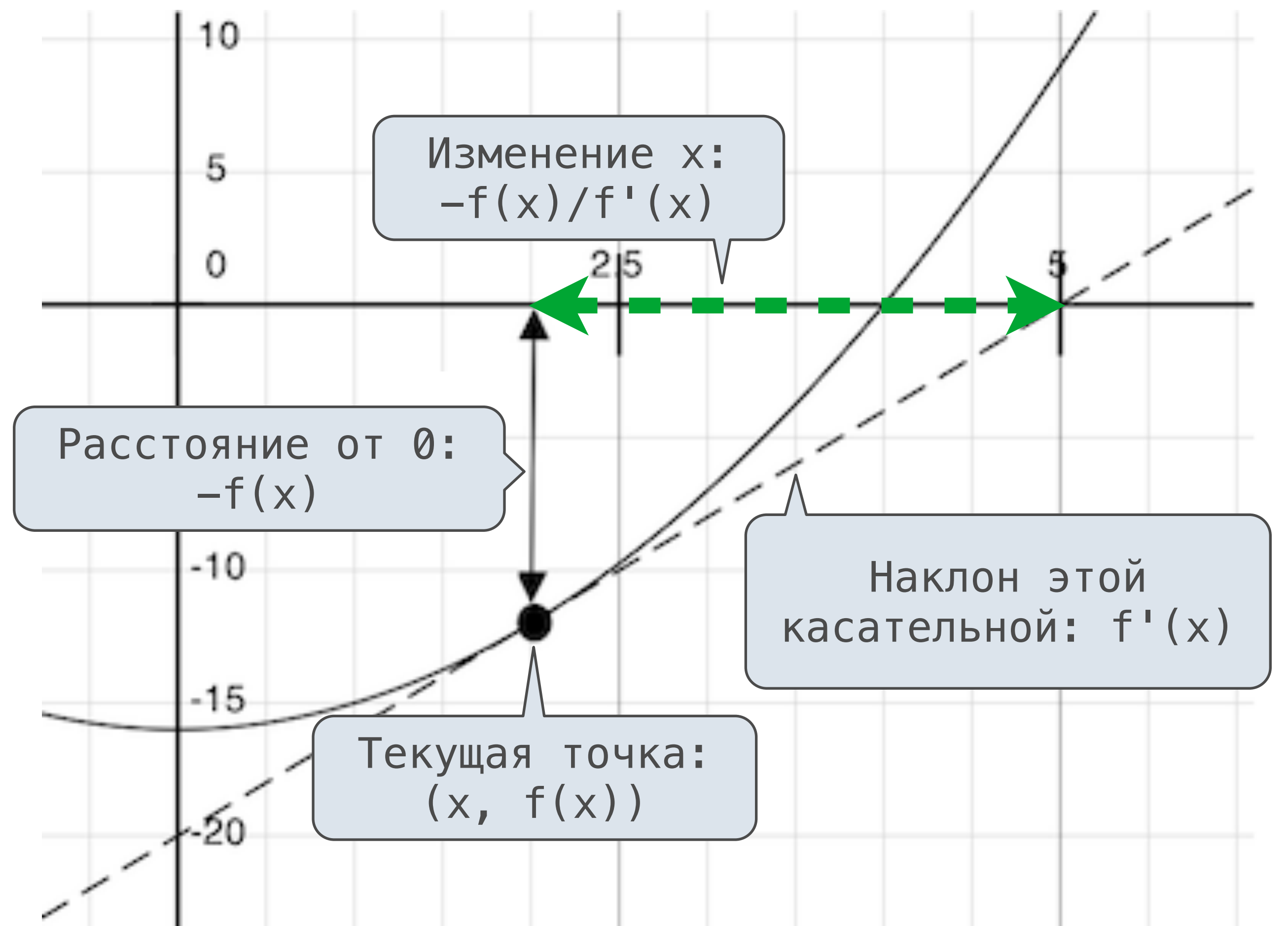
Дана функция  $f$  и начальное приближение  $x$ ,

Итеративно «улучшаем»  $x$ :

Вычисляется значение  $f$   
в точке  $x$ :  $f(x)$

Вычисляется значение  
производной функции  $f$   
в точке  $x$ :  $f'(x)$

Приближение  $x$   
изменяется на:  $x - \frac{f(x)}{f'(x)}$



# Метод Ньютона

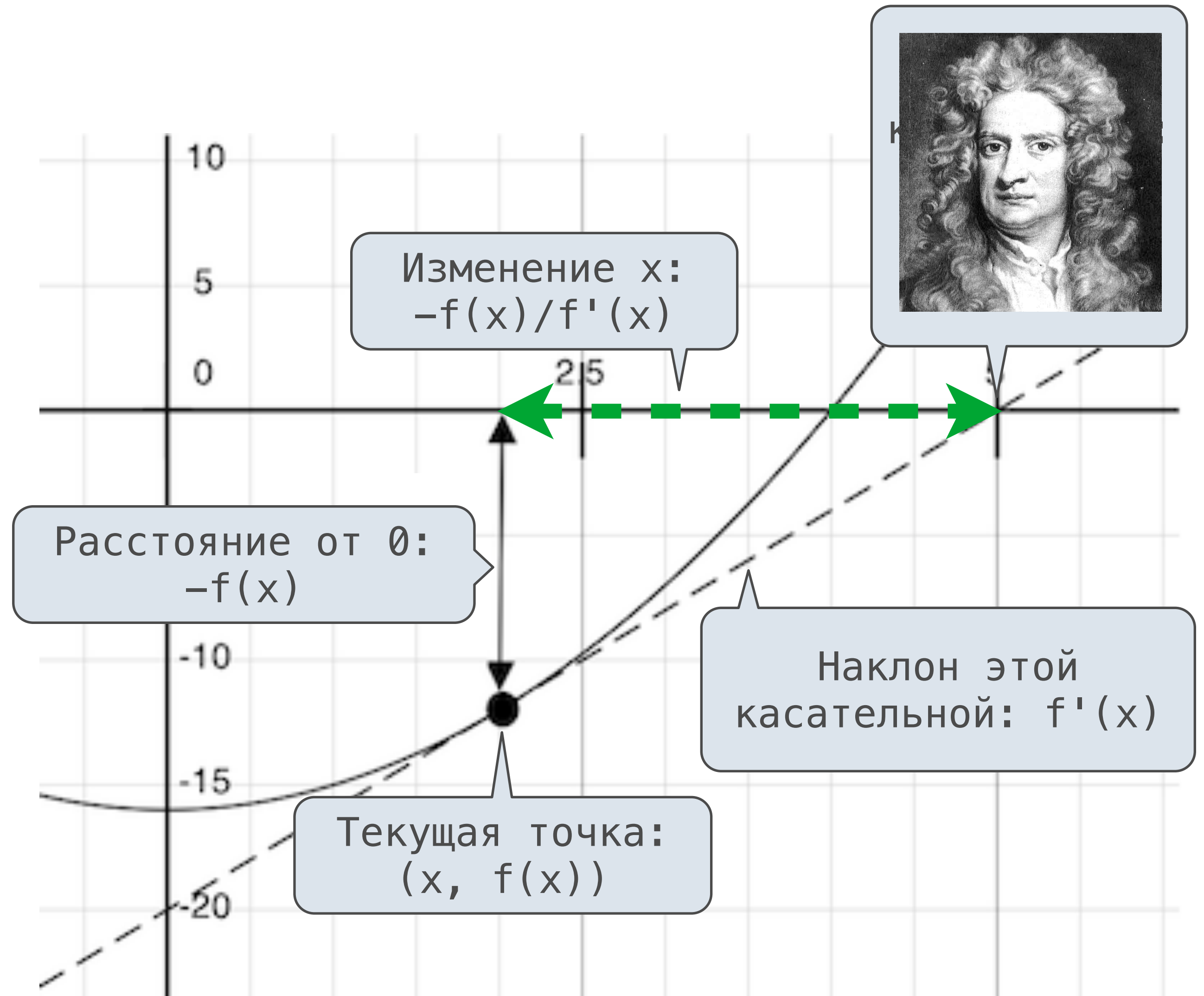
Дана функция  $f$  и начальное приближение  $x$ ,

Итеративно «улучшаем»  $x$ :

Вычисляется значение  $f$   
в точке  $x$ :  $f(x)$

Вычисляется значение  
производной функции  $f$   
в точке  $x$ :  $f'(x)$

Приближение  $x$   
изменяется на:  $x - \frac{f(x)}{f'(x)}$



# Метод Ньютона

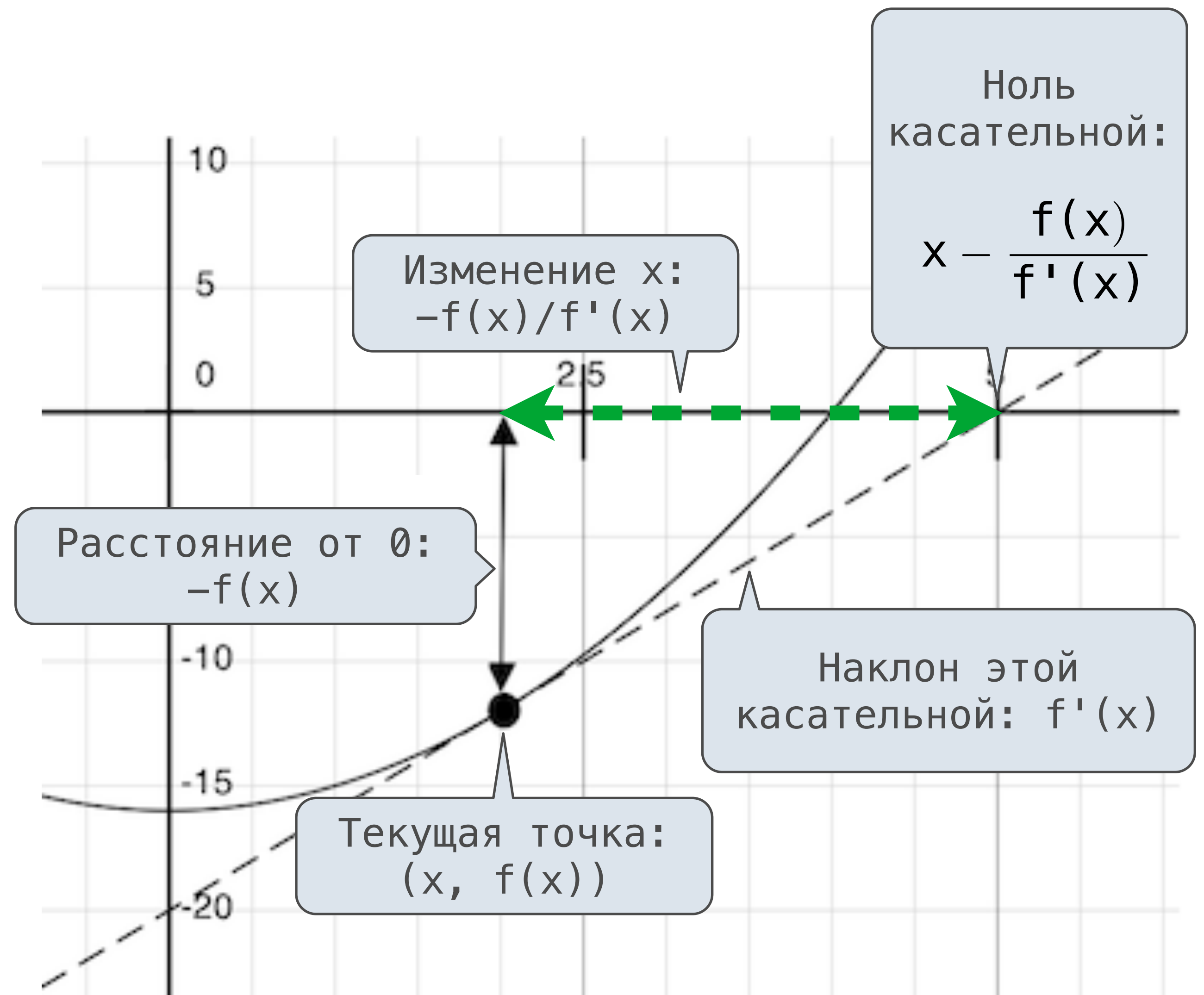
Дана функция  $f$  и начальное приближение  $x$ ,

Итеративно «улучшаем»  $x$ :

Вычисляется значение  $f$   
в точке  $x$ :  $f(x)$

Вычисляется значение  
производной функции  $f$   
в точке  $x$ :  $f'(x)$

Приближение  $x$   
изменяется на:  $x - \frac{f(x)}{f'(x)}$





# Метод Ньютона

Дана функция  $f$  и начальное приближение  $x$ ,

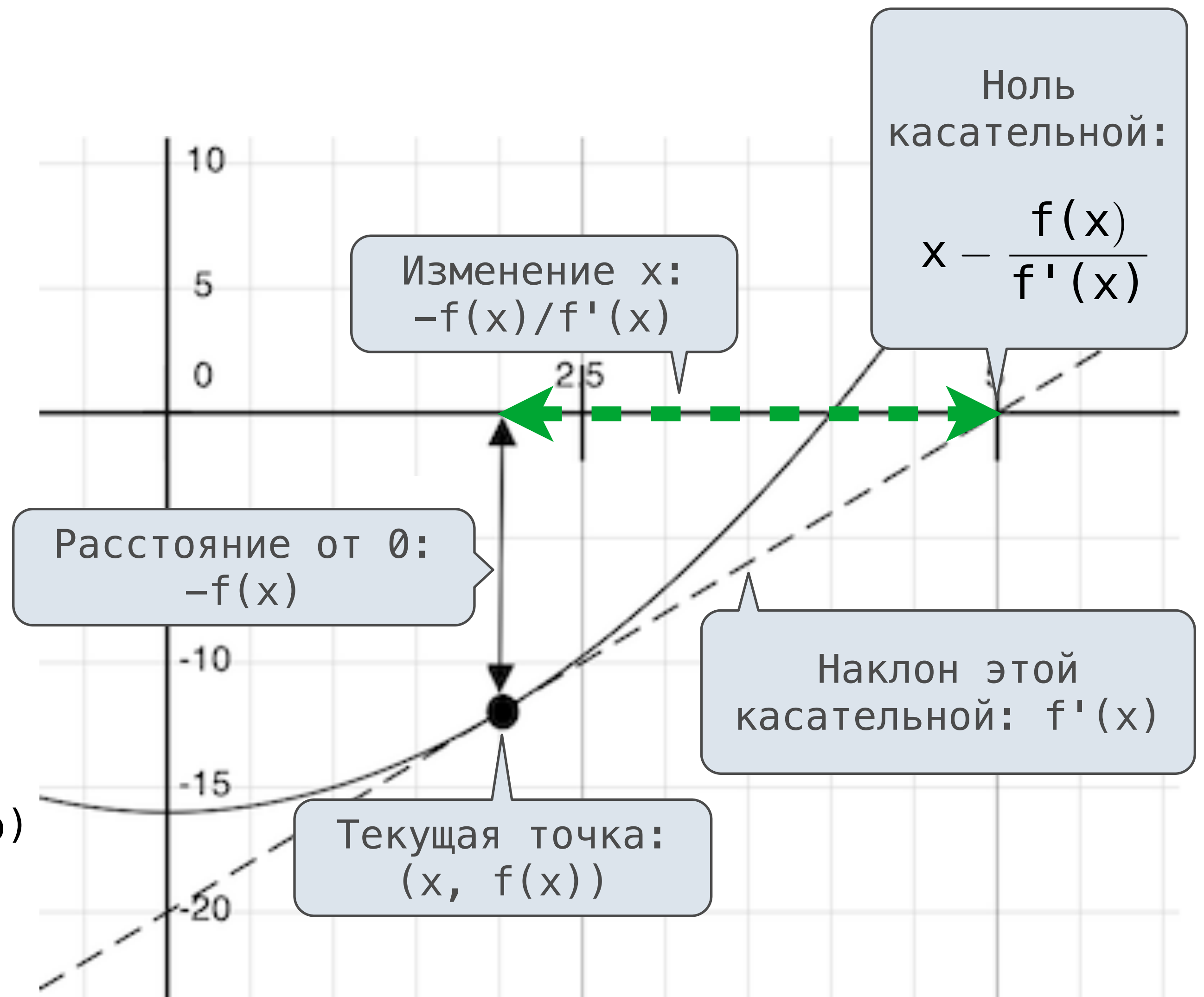
Итеративно «улучшаем»  $x$ :

Вычисляется значение  $f$   
в точке  $x$ :  $f(x)$

Вычисляется значение  
производной функции  $f$   
в точке  $x$ :  $f'(x)$

Приближение  $x$   
изменяется на:  $x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

Останов, если  $f(x) = 0$  (или приблизительно)



# Метод Ньютона

Дана функция  $f$  и начальное приближение  $x$ ,

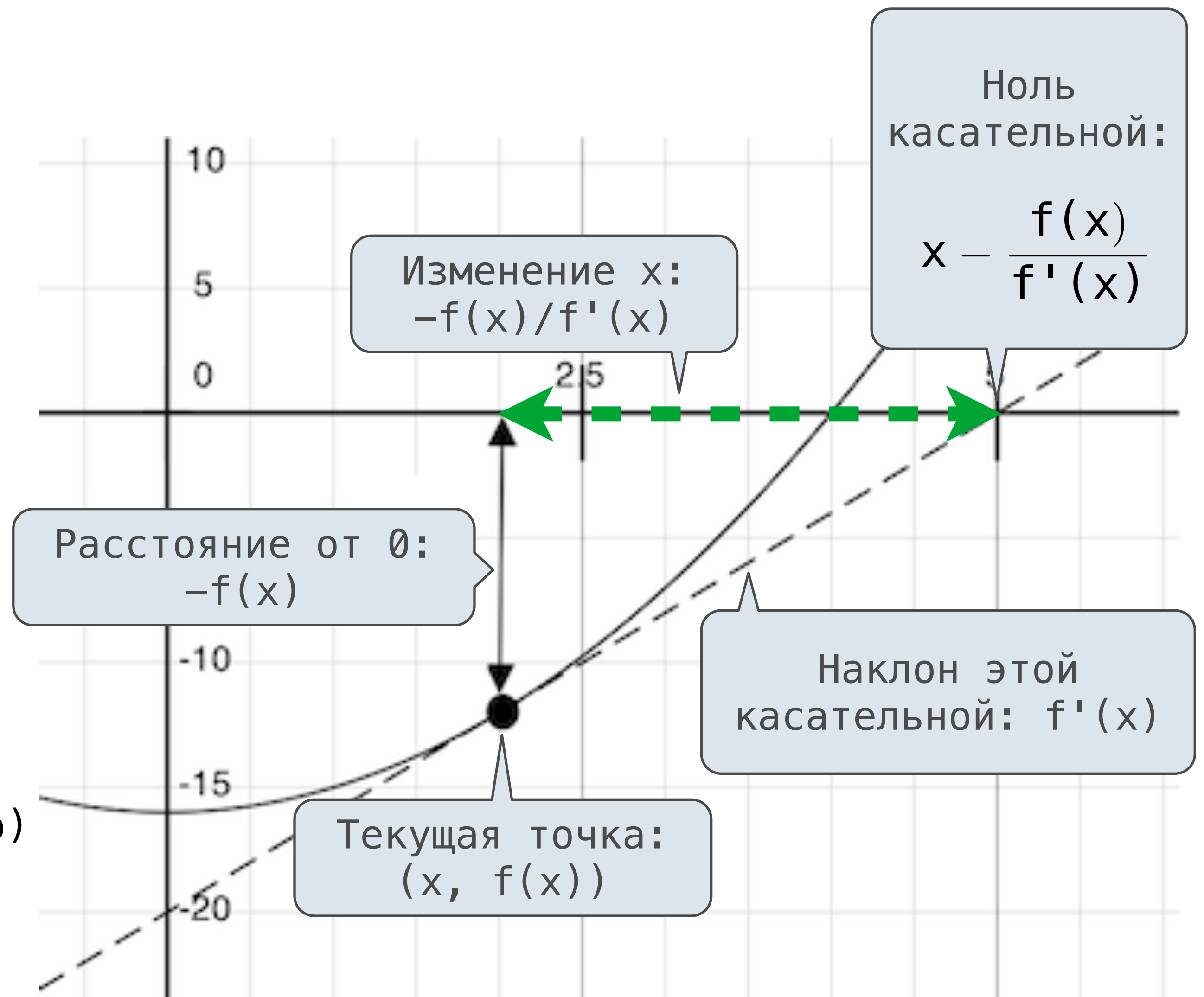
Итеративно «улучшаем»  $x$ :

Вычисляется значение  $f$   
в точке  $x$ :  $f(x)$

Вычисляется значение  
производной функции  $f$   
в точке  $x$ :  $f'(x)$

Приближение  $x$   
изменяется на:  $x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

Останов, если  $f(x) = 0$  (или приблизительно)



# Использование метода Ньютона

---



# Использование метода Ньютона

---

Как найти квадратный корень из 2?

## Использование метода Ньютона

---

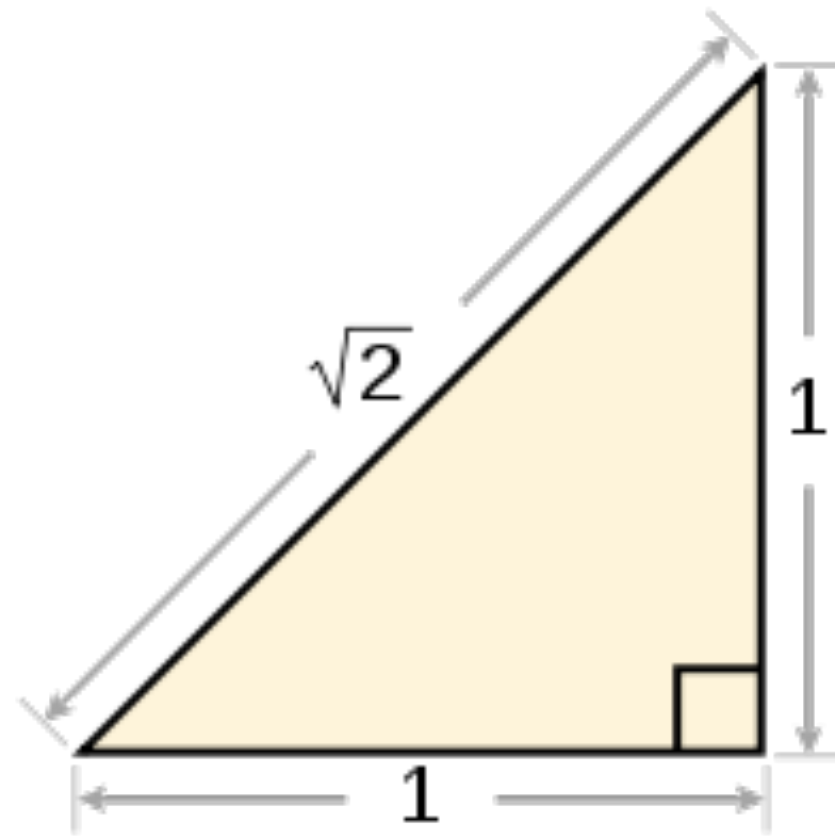
Как найти квадратный корень из 2?

```
>>> f = lambda x: x*x - 2
>>> df = lambda x: 2*x
>>> find_zero(f, df)
1.4142135623730951
```

# Использование метода Ньютона

---

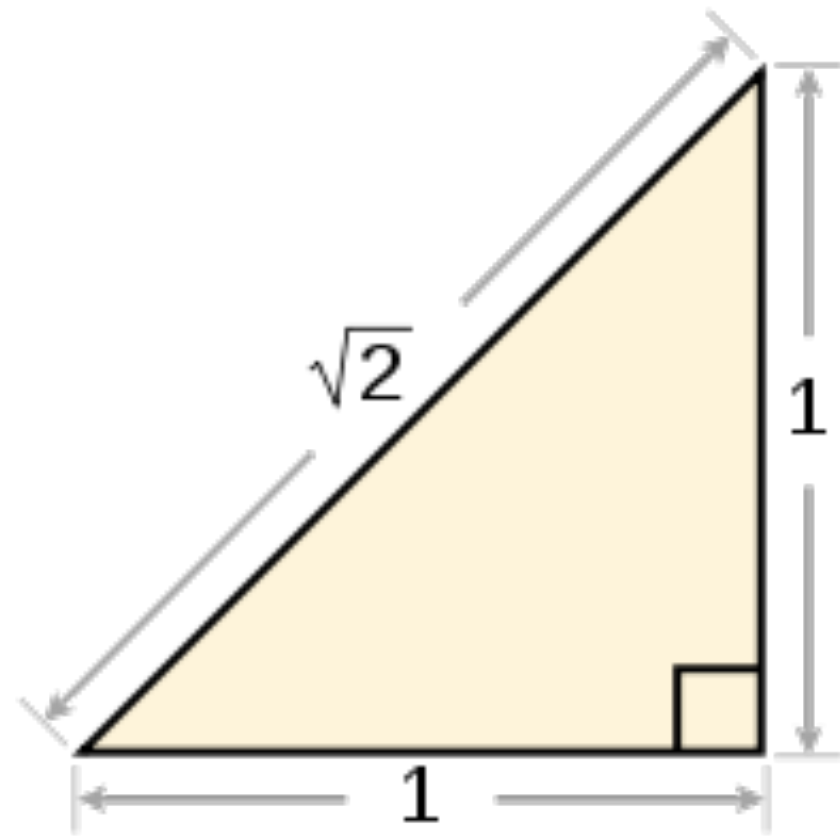
Как найти квадратный корень из 2?



```
>>> f = lambda x: x*x - 2
>>> df = lambda x: 2*x
>>> find_zero(f, df)
1.4142135623730951
```

# Использование метода Ньютона

Как найти квадратный корень из 2?

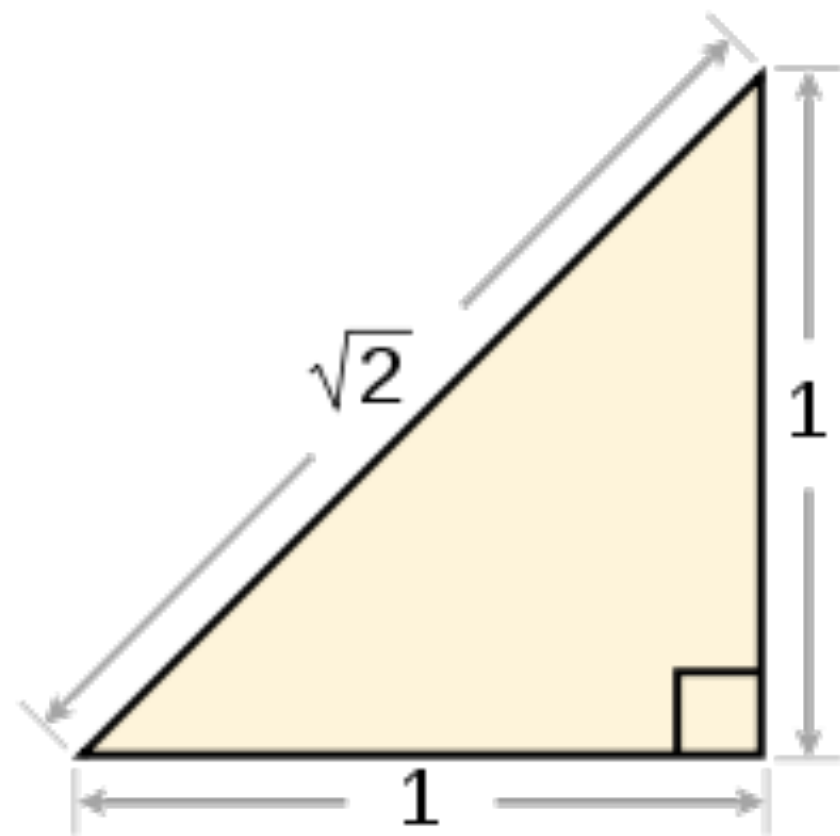


```
>>> f = lambda x: x*x - 2  
>>> df = lambda x: 2*x  
>>> find_zero(f, df)  
1.4142135623730951
```

$$f(x) = x^2 - 2$$
$$f'(x) = 2x$$

# Использование метода Ньютона

Как найти квадратный корень из 2?



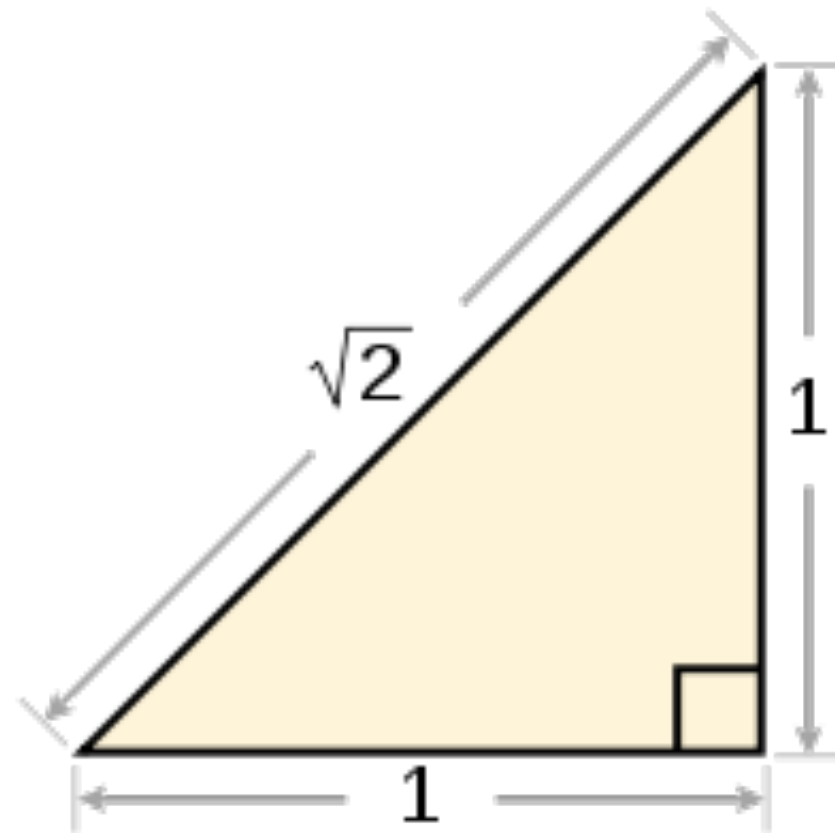
```
>>> f = lambda x: x*x - 2
>>> df = lambda x: 2*x
>>> find_zero(f, df)
1.4142135623730951
```

$$f(x) = x^2 - 2$$
$$f'(x) = 2x$$

Применяет метод Ньютона

# Использование метода Ньютона

Как найти квадратный корень из 2?



```
>>> f = lambda x: x*x - 2
>>> df = lambda x: 2*x
>>> find_zero(f, df)
1.4142135623730951
```

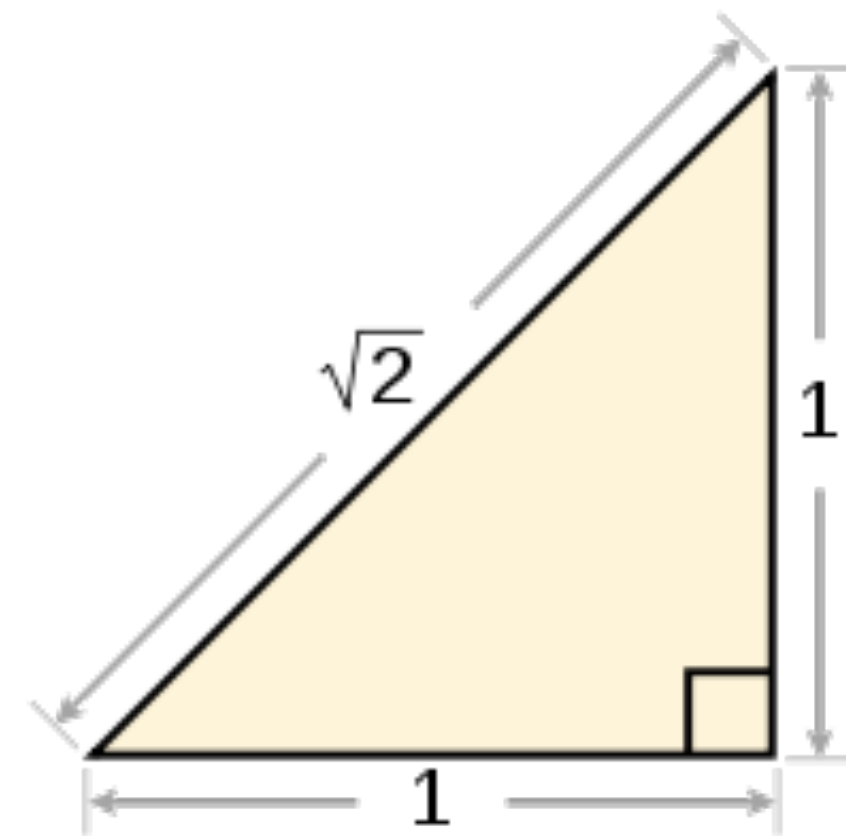
$$f(x) = x^2 - 2$$
$$f'(x) = 2x$$

Применяет метод Ньютона

Как найти кубический корень из 729?

# Использование метода Ньютона

Как найти квадратный корень из 2?

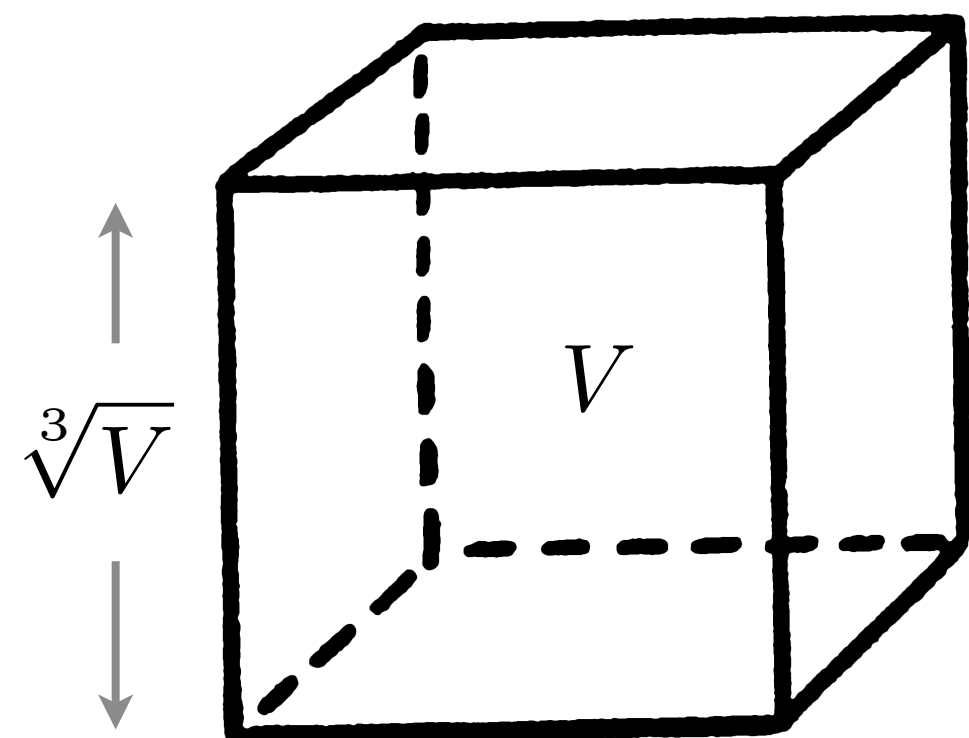


```
>>> f = lambda x: x*x - 2  
>>> df = lambda x: 2*x  
>>> find_zero(f, df)  
1.4142135623730951
```

$$f(x) = x^2 - 2$$
$$f'(x) = 2x$$

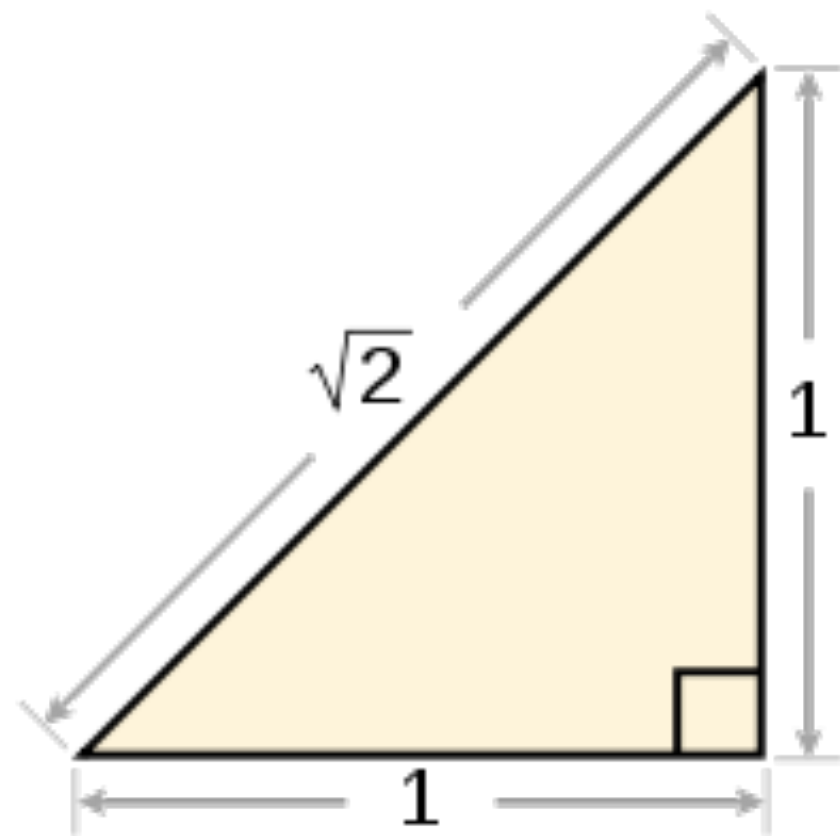
Применяет метод Ньютона

Как найти кубический корень из 729?



## Использование метода Ньютона

Как найти квадратный корень из 2?

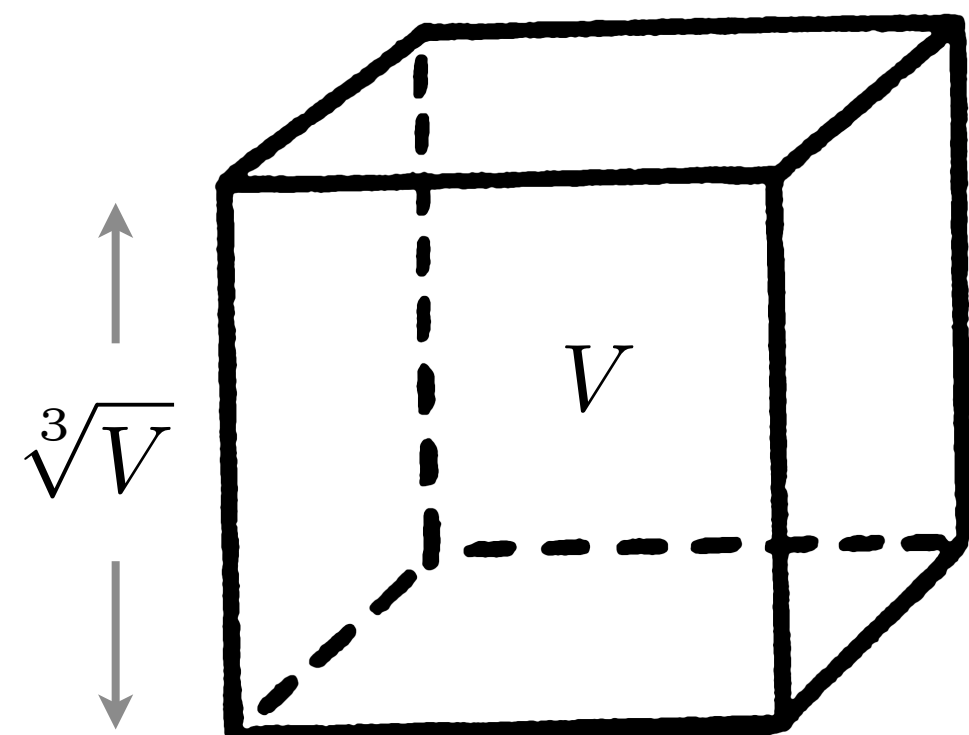


```
>>> f = lambda x: x*x - 2
>>> df = lambda x: 2*x
>>> find_zero(f, df)
1.4142135623730951
```

$$f(x) = x^2 - 2$$
$$f'(x) = 2x$$

Применяет метод Ньютона

Как найти кубический корень из 729?

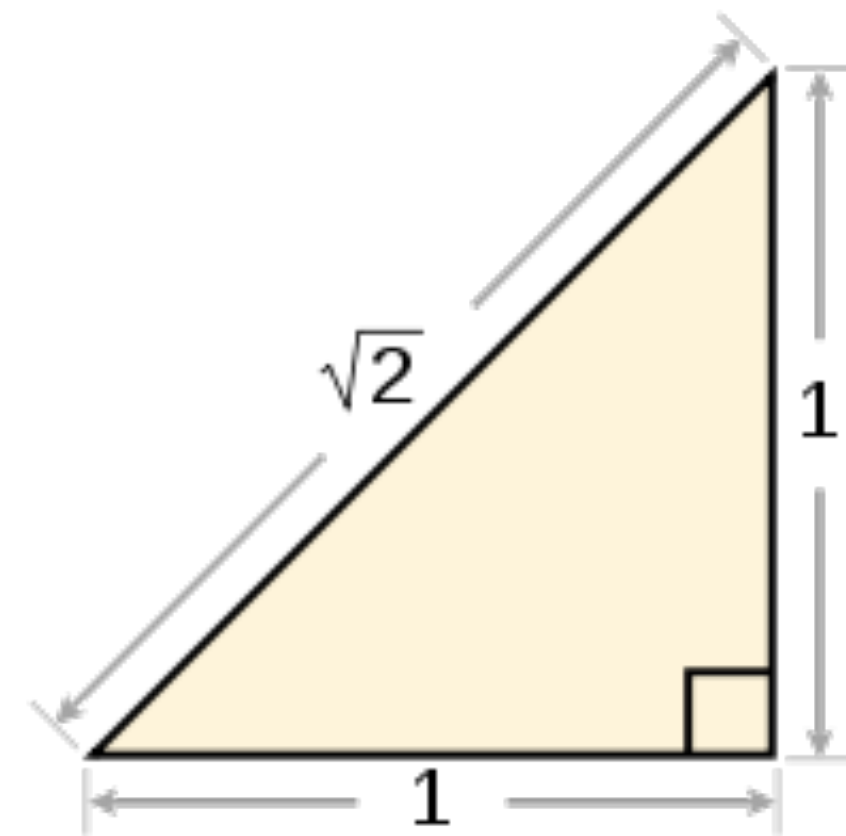


```
>>> g = lambda x: x*x*x - 729
>>> dg = lambda x: 3*x*x
>>> find_zero(g, dg)
9.0
```



# Использование метода Ньютона

Как найти квадратный корень из 2?

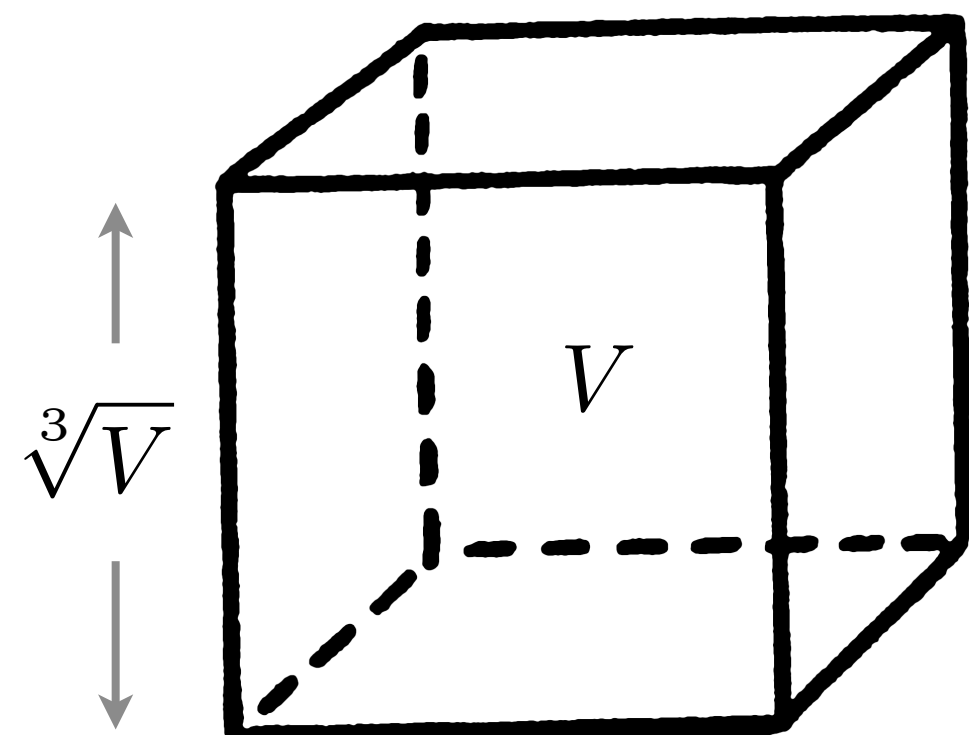


```
>>> f = lambda x: x*x - 2
>>> df = lambda x: 2*x
>>> find_zero(f, df)
1.4142135623730951
```

$$f(x) = x^2 - 2$$
$$f'(x) = 2x$$

Применяет метод Ньютона

Как найти кубический корень из 729?



```
>>> g = lambda x: x*x*x - 729
>>> dg = lambda x: 3*x*x
>>> find_zero(g, dg)
9.0
```

$$g(x) = x^3 - 729$$
$$g'(x) = 3x^2$$

# Итеративное приближение

## Частный случай: квадратные корни

---

## Частный случай: квадратные корни

---

Как вычислить квадратный корень из  $a$ , то есть `square_root(a)`?

**Идея:** Итеративно приближать  $x$  к квадратному корню из  $a$

## Частный случай: квадратные корни

---

Как вычислить квадратный корень из  $a$ , то есть `square_root(a)`?

**Идея:** Итеративно приближать  $x$  к квадратному корню из  $a$

**Изменение:**

## Частный случай: квадратные корни

---

Как вычислить квадратный корень из  $a$ , то есть `square_root(a)`?

**Идея:** Итеративно приближать  $x$  к квадратному корню из  $a$

**Изменение:** 
$$x = \frac{x + \frac{a}{x}}{2}$$

## Частный случай: квадратные корни

---

Как вычислить квадратный корень из  $a$ , то есть  $\text{square\_root}(a)$ ?

**Идея:** Итеративно приближать  $x$  к квадратному корню из  $a$

**Изменение:** 
$$x = \frac{x + \frac{a}{x}}{2}$$

Вавилонский метод

## Частный случай: квадратные корни

---

Как вычислить квадратный корень из  $a$ , то есть  $\text{square\_root}(a)$ ?

**Идея:** Итеративно приближать  $x$  к квадратному корню из  $a$

**Изменение:** 
$$x = \frac{x + \frac{a}{x}}{2}$$

(Пример)

Вавилонский метод



## Частный случай: квадратные корни

---

Как вычислить квадратный корень из  $a$ , то есть  $\text{square\_root}(a)$ ?

**Идея:** Итеративно приближать  $x$  к квадратному корню из  $a$

**Изменение:** 
$$x = \frac{x + \frac{a}{x}}{2}$$

(Пример)

Вавилонский метод

**Вопросы реализации:**

## Частный случай: квадратные корни

---

Как вычислить квадратный корень из  $a$ , то есть  $\text{square\_root}(a)$ ?

**Идея:** Итеративно приближать  $x$  к квадратному корню из  $a$

**Изменение:** 
$$x = \frac{x + \frac{a}{x}}{2}$$

(Пример)

Вавилонский метод

**Вопросы реализации:**

С какого начального приближения стартовать?

## Частный случай: квадратные корни

---

Как вычислить квадратный корень из  $a$ , то есть  $\text{square\_root}(a)$ ?

**Идея:** Итеративно приближать  $x$  к квадратному корню из  $a$

**Изменение:** 
$$x = \frac{x + \frac{a}{x}}{2}$$

(Пример)

Вавилонский метод

**Вопросы реализации:**

С какого начального приближения стартовать?

Как понять когда остановиться?

## Частный случай: кубические корни

---

## Частный случай: кубические корни

---

Как вычислить кубический корень из  $a$ , то есть `cube_root(a)`?

**Идея:** Итеративно приближать  $x$  к кубическому корню из  $a$

## Частный случай: кубические корни

---

Как вычислить кубический корень из  $a$ , то есть  $\text{cube\_root}(a)$ ?

**Идея:** Итеративно приближать  $x$  к кубическому корню из  $a$

**Изменение:**

## Частный случай: кубические корни

---

Как вычислить кубический корень из  $a$ , то есть  $\text{cube\_root}(a)$ ?

**Идея:** Итеративно приближать  $x$  к кубическому корню из  $a$

**Изменение:**

$$x = \frac{2 \cdot x + \frac{a}{x^2}}{3}$$

## Частный случай: кубические корни

---

Как вычислить кубический корень из  $a$ , то есть  $\text{cube\_root}(a)$ ?

**Идея:** Итеративно приближать  $x$  к кубическому корню из  $a$

**Изменение:**

$$x = \frac{2 \cdot x + \frac{a}{x^2}}{3}$$

(Пример)



## Частный случай: кубические корни

---

Как вычислить кубический корень из  $a$ , то есть  $\text{cube\_root}(a)$ ?

**Идея:** Итеративно приближать  $x$  к кубическому корню из  $a$

**Изменение:**

$$x = \frac{2 \cdot x + \frac{a}{x^2}}{3}$$

(Пример)

**Вопросы реализации:**

## Частный случай: кубические корни

---

Как вычислить кубический корень из  $a$ , то есть  $\text{cube\_root}(a)$ ?

**Идея:** Итеративно приближать  $x$  к кубическому корню из  $a$

**Изменение:**

$$x = \frac{2 \cdot x + \frac{a}{x^2}}{3}$$

(Пример)

**Вопросы реализации:**

С какого начального приближения стартовать?

## Частный случай: кубические корни

---

Как вычислить кубический корень из  $a$ , то есть  $\text{cube\_root}(a)$ ?

**Идея:** Итеративно приближать  $x$  к кубическому корню из  $a$

**Изменение:**

$$x = \frac{2 \cdot x + \frac{a}{x^2}}{3}$$

(Пример)

**Вопросы реализации:**

С какого начального приближения стартовать?

Как понять когда остановиться?

# Реализация метода Ньютона

(Пример)