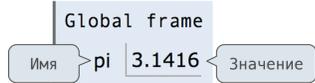


Код (слева):

Инструкции и выражения

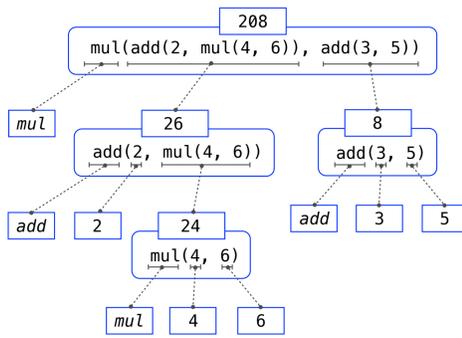
Стрелки указывают порядок исполнения



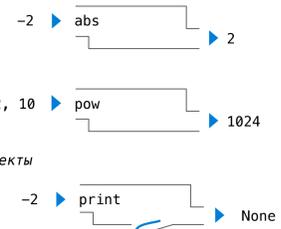
Фреймы (справа):

Каждое имя связано со значением

Внутри фрейма имя не может повторяться



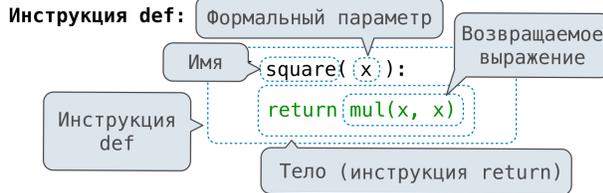
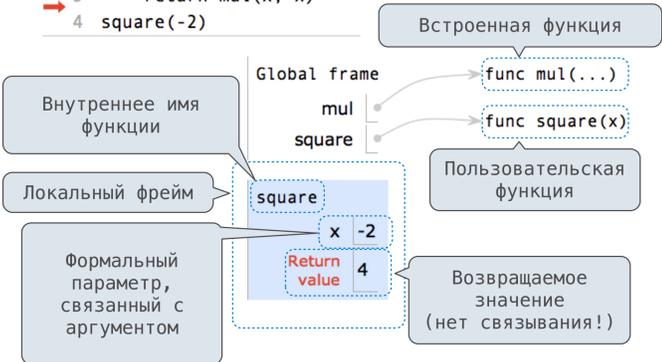
Чистые функции  
просто возвращают значения



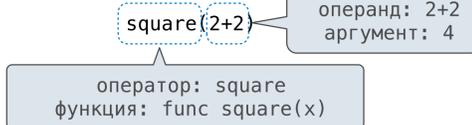
Нечистые функции  
имеют побочные эффекты

Python отображает вывод «-2»

```
1 from operator import mul
2 def square(x):
3     return mul(x, x)
4 square(-2)
```



Вызывающее выражение:



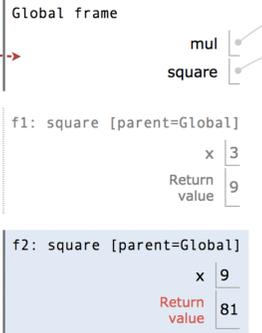
Вызов/Применение:



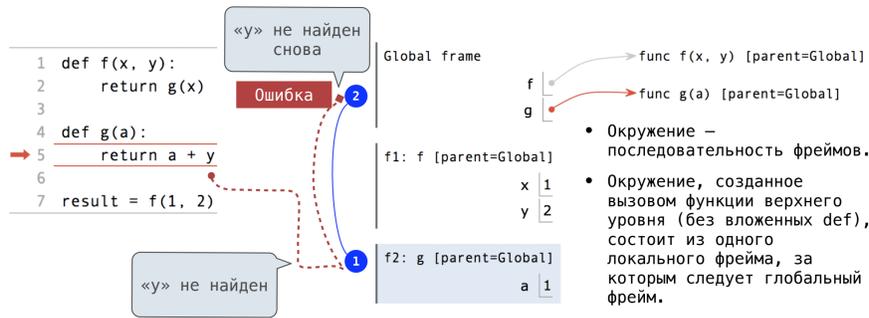
```
def abs_value(x):
    if x < 0:
        return -x
    elif x == 0:
        return 0
    else:
        return x
```

1 инструкция,  
3 предложения,  
3 заголовка,  
2 набора,  
2 логических  
контекста

```
1 from operator import mul
2 def square(x):
3     return mul(x, x)
4 square(square(3))
```



Значение имени в текущем окружении берётся из первого фрейма, в котором это имя присутствует.



- Окружение – последовательность фреймов.
- Окружение, созданное вызовом функции верхнего уровня (без вложенных def), состоит из одного локального фрейма, за которым следует глобальный фрейм.

**Процедура выполнения вызывающего выражения:**

- Определить значения подвыражений оператора и операндов.
- Вызвать функцию, являющуюся значением подвыражения оператора, с аргументами равными значениям подвыражений операндов.

**Выполнение инструкции def:**

- Создать функцию с сигнатурой: <имя>(<формальные параметры>)
- Определить тело функции по отступам строк.
- В текущем фрейме связать <имя> с созданной функцией.

**Правила выполнения инструкций присвоения:**

- Вычислить значения всех выражений справа от = слева направо.
- Связать в текущем фрейме все имена слева от = с полученными значениями.

**Процедура вызова/применения пользовательской функции:**

- Создать новый локальный фрейм, сформировав новое окружение.
- Связать в этом фрейме формальные параметры функции с аргументами.
- Выполнить тело функции в новом окружении.

**Правило выполнения для условных инструкций if:**

- Каждое предложение рассматривается по порядку.
- Вычислить выражение в заголовке.
- Если оно истинно, выполнить первый набор и пропустить остальные предложения.

**Правило выполнения выражения and:**

- Выполнить левое подвыражение.
- Если результат является неистинным, то вернуть этот результат.
- В противном случае вернуть результат правого подвыражения.

**Правило выполнения выражения or:**

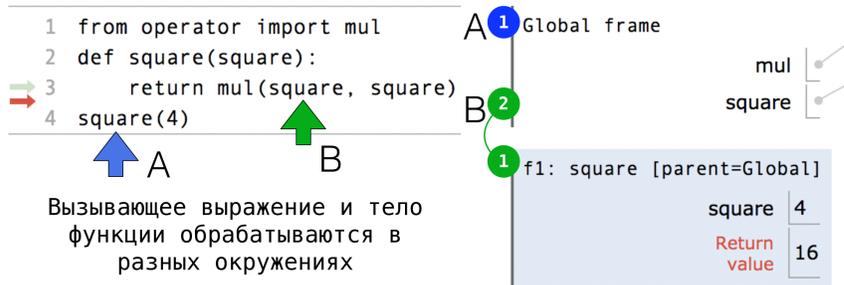
- Выполнить левое подвыражение.
- Если результат является истинным, то вернуть этот результат.
- В противном случае вернуть результат правого подвыражения.

**Правило выполнения выражения not:**

- Если результат подвыражения истинный, то вернуть неистинный, в противном случае вернуть истинный.

**Правило выполнения инструкции while:**

- Вычислить выражение в заголовке.
- Если оно истинно, выполнить (весь) набор, затем вернуться к шагу 1.



```
def fib(n):
    """Вычисляет n-ое число Фибоначчи, для n >= 1."""
    pred, curr = 0, 1 # нулевое и первое числа Фибоначчи
    k = 1 # curr - k-ое число Фибоначчи
    while k < n:
        pred, curr = curr, pred + curr
        k = k + 1
    return curr
```



```
def cube(k):
    return pow(k, 3)
```

```
def summation(n, term):
    """Sum the first n terms of a sequence.
```

```
>>> summation(5, cube)
225
```

```
total, k = 0, 1
while k <= n:
    total, k = total + term(k), k + 1
return total
```

0 + 1 + 8 + 27 + 64 + 125

Функция одного аргумента (не называется «term»)

Формальный параметр, который будет связан с этой функцией

Функция «cube» передается в качестве аргумента

Здесь вызывается функция связанная с «term»

Функция высшего порядка – функция, принимающая в качестве аргументов другие функции или возвращающая другую функцию в качестве результата.  
Вложенная инструкция def – функция заданная внутри тела другой функции связывается с именем в локальном фрейме.

При задании функции:

Создается функция: `func <имя>(<формальные параметры>) [parent=<метка>]`

Её родителем является текущий фрейм.

```
f1: make_adder      func adder(k) [parent=f1]
```

Происходит связывание <имени> с функцией в текущем фрейме

При вызове функции:

1. Добавляется локальный фрейм, озаглавленный <именем> вызванной функции.
- ★ 2. Родитель функции копируется в локальный фрейм: [parent=<метка>]
3. <Формальные параметры> связываются с аргументами в локальном фрейме.
4. В окружении, начинающемся с локального фрейма, выполняется тело функции.

```
square = lambda x: x * x
```

VS

```
def square(x):
    return x * x
```

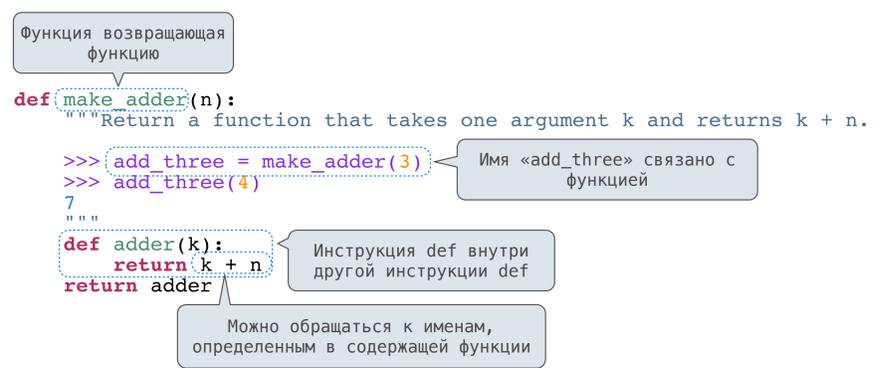
- Обе создают функцию с одинаковым поведением, областями определения и значения.
- Обе функции считают родительским фрейм, в котором они определены.
- Обе функции связаны с именем «square».
- Только инструкция «def» назначает функции внутреннее имя.

```
>>> x = 10
>>> square = x * x
>>> square = lambda x: x * x
>>> square(4)
16
```

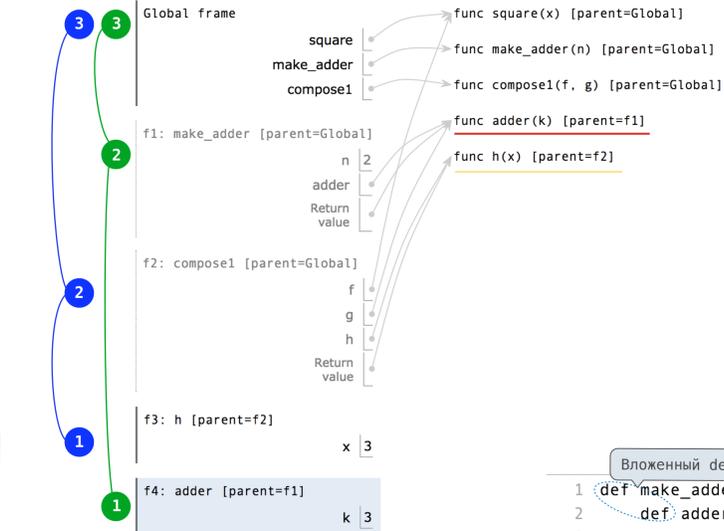


```
def make_adder(n):
    """Return a function that takes one argument k and returns k + n."""
    def adder(k):
        return k + n
    return adder

add_three = make_adder(3)
add_three(4)
7
```



```
1 def square(x):
2     return x * x
3
4 def make_adder(n):
5     def adder(k):
6         return k + n
7     return adder
8
9 def compose1(f, g):
10    def h(x):
11        return f(g(x))
12    return h
13
14 compose1(square, make_adder(2))(3)
```

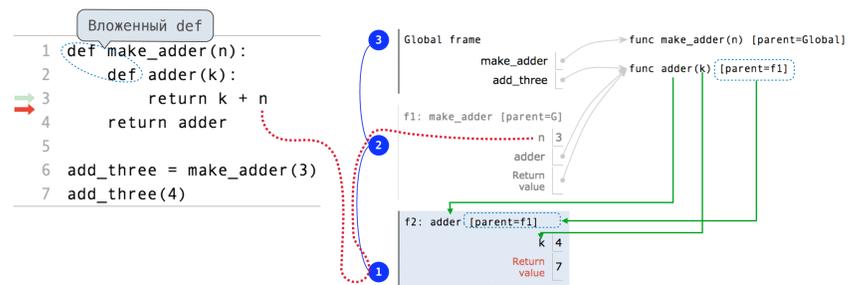


Структура рекурсивной функции

- Заголовок инструкции def как и в других функциях
- Инструкция ветвления отделяет простые случаи
- Простые случаи выполняются без рекурсивных вызовов
- Рекурсивные случаи выполняются с рекурсивными вызовами

```
def sum_digits(n):
    """Возвращает сумму цифр положительного целого n."""
    if n < 10:
        return n
    else:
        all_but_last, last = split(n)
        return sum_digits(all_but_last) + last
```

```
1 def make_adder(n):
2     def adder(k):
3         return k + n
4     return adder
5
6 add_three = make_adder(3)
7 add_three(4)
```



- Каждая пользовательская функция имеет родительский фрейм (часто глобальный)
- Родитель функции – фрейм, в котором задана функция
- Каждый локальный фрейм имеет родительский фрейм (часто глобальный)
- Родитель фрейма – родитель вызванной функции

```
def curry2(f):
    """Возвращает функцию g, такую что g(x)(y) возвращает f(x, y)."""
    def g(x):
        def h(y):
            return f(x, y)
        return h
    return g

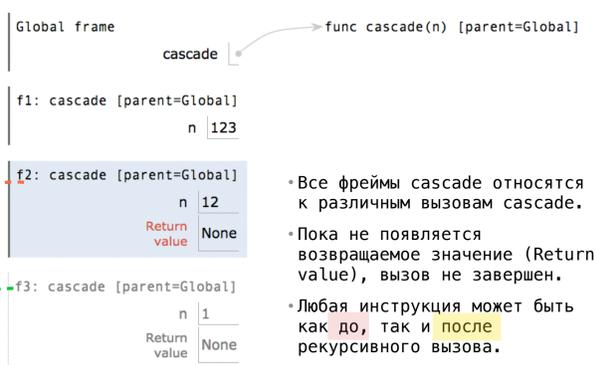
>>> from operator import add
>>> add_three = curry2(add)(3)
>>> add_three(4)
7
```

Каррирование: преобразование функции от многих аргументов в функцию высшего порядка, берущую свои аргументы по одному.

```
1 def cascade(n):
2     if n < 10:
3         print(n)
4     else:
5         print(n)
6         cascade(n//10)
7         print(n)
8
9 cascade(123)
```

Program output:

```
123
12
1
12
```



```
Global frame      func fact(n) [parent=Global]
fact
f1: fact [parent=Global]
n 3
f2: fact [parent=Global]
n 2
f3: fact [parent=Global]
n 1
f4: fact [parent=Global]
n 0
Return value 1
```

Корректна ли функция fact?

1. Проверяем простой случай.
2. Рассматриваем fact как функциональную абстракцию!
3. Предполагаем, что fact(n-1) работает правильно.
4. Удостоверяемся, что fact(n) корректен, в предположении, что значение fact(n-1) правильно.

```
def fact(n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return n * fact(n-1)
```

```
1 def inverse_cascade(n):
12     grow(n)
123     print(n)
1234    shrink(n)
123
12 def f_then_g(f, g, n):
1     if n:
1         f(n)
1         g(n)

grow = lambda n: f_then_g(grow, print, n//10)
shrink = lambda n: f_then_g(print, shrink, n//10)
```



- Рекурсивная декомпозиция: поиск более простых случаев.
- Исследуем две возможности:
  - Хотя бы одна часть равна 4
  - Нет ни одной части равной 4
- Решаем две более простые задачи:
  - count\_partitions(2, 4)
  - count\_partitions(6, 3)
- Древовидная рекурсия зачастую предполагает исследование различных вариантов.

```
def count_partitions(n, m):
    if n == 0:
        return 1
    elif n < 0:
        return 0
    elif m == 0:
        return 0
    else:
        with_m = count_partitions(n-m, m)
        without_m = count_partitions(n, m-1)
        return with_m + without_m
```